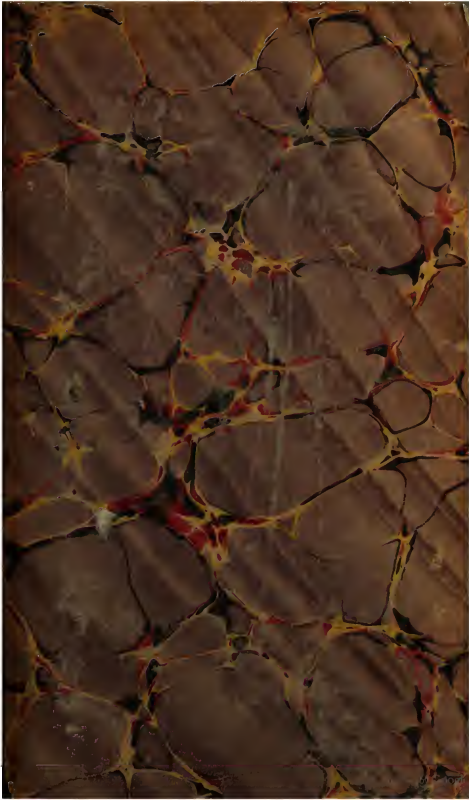






BIBLIOTECA PROVINCIALE

Armadio



6.

Palchetto

Num.° d'ordine

st. 1-8 23



B. P

I

235

11

1.2

TRATTATI

APPARTENENTI

ALL' INVENZIONE GEOMETRICA.

I Trattati finora pubblicati sono la presente *Geometria di Sito*, il *Trattato Analitico delle Sezioni Coniche* e l'altro de' *Luoghi Geometrici* del Signor *Fergola*; ed essi sono anche bastanti a formare lo spirito d'invenzione in coloro che vogliono, e sono atti ad imprendere questa carriera.

606389

GEOMETRIA

DI

S I T O

SUL PIANO E NELLO SPAZIO

DI V. FLAUTI

Professore di Analisi Sublime nella Regia Università degli Studj di Napoli, Bibliotecario della Società Reale Borbonica, Socio e Segretario per le Matematiche della Reale Accademia delle Scienze di Napoli, dell'Istituto d'Incoraggiamento, Membro Onorario della Società Reale di Copenhagen, e di altre Accademie ec.

SECONDA EDIZIONE CON ALCUNE ADDIZIONI.

Situs linearum varios discernere, et cum alias omnes, tum et ipsius quantitatis relationes, si quae ex situ oriundae, vel lineis ipsis, vel figuris quas lineae claudunt, intercedunt, explorare, id, ni fallor, Geometriae munus est.

SAM. HORSLEY.



IN NAPOLI

Nella Stamparia al Palazzo Cariatì num.º 32.

1821.

A F E R G O L A

Quantunque volte, o Illustre Fergola, l'occasione mi si presenta di meditare sugli originali de' Greci Geometri, è forza che io resti vie più convinto, che le loro invenzioni in Geometria grandemente prevalgano alle scoperte di questo genere fatte a' nostri tempi. Ed a me pare, che fino a tanto che non possederemo co' nostri metodi tante diverse dottrine su i luoghi geometrici, quante gli antichi ne inventarono a dovizia: che i sapientissimi libri de' porismi del saggio Euclide non saranno coll'analisi moderna restituiti (difficilissimo lavoro); e che inoltre metodi non ritroveremo atti a costruir problemi oltre il quarto grado, uopo è che ci riconosciamo di gran lunga inferiori agli antichi. Abbandonar dunque la loro guida, come oggigiorno la più parte costuma, e tener da poco i loro precetti, e le loro opere non istudiar perfet-

tamente , per colui che /vuole inoltrarsi nell' ardua carriera dell' invenzione geometrica , dandosi tutto all' analisi moderna , è lo stesso , come ben diceva un dotto Italiano (*), che *introdursi senza filo in un oscuro laberinto.*

Coltivarono con ardentissimo amore le opere degli antichi , e le studiarono profondamente il Cartesio , il Fermat , l' Ugenio , il Newton , il Leibnitz , i Bernoulli , l' Eulero , e tanti altri che vissero in tempi non molto da noi discosti ; e nuove scoperte importanti , e nuovi metodi ancora si videro dalle loro considerazioni derivare : nè il secolo scorso dopo essi , abbia il vero il suo luogo , ha molto aggiunto alle loro invenzioni.

Il trattar dunque ramo che alla Geometria degli antichi si appartenga , esser lo devol cosa , a Voi nol debbo io ridire.

Tale parmi che sieno le dottrine geometriche di Sito , che nel presente trattato imprendo ad esporre ; poichè sebbene non

(*) Il celebre Giuseppe Torelli autore del bellissimo *Archimede* stampato in Oxford nel 1792.

vi sia da dubitare, che in questa parte importante del luogo di risoluzione, ove la Geometria dispiega tutta la sua attività e l' suo impero, non mancarono gli antichi di stabilire immensa dottrina, ciò non pertanto questa dall' ingiuria de' tempi è stata interamente a noi tolta. Nè finora, per quanti moderni io sappia, che abbian cercato di occuparsene, alcuno mai è arrivato a tal punto da poter dire, o d'aver restituito ciò che gli antichi avevano scritto, o almeno d'aver indicate le tracce delle loro dottrine, o finalmente d'aver fatto conoscere, eh' essi se ne fossero una volta giudiziosamente occupati.

Io ho dunque intrapreso questo lavoro, sperando che la Gioventù Napolitana possa valersi di un tal Trattato, non solamente per l'utilità, che in molti casi le costruzioni, che vi si contengono potranno recare in pratica a' bisogni della società; ma anche perchè possa servirsene a guida nell' ardua carriera del geometrico inventare, fintanto che nuova e migliore scorta non gli sarà permesso di avere dalle sublimi produzioni del vostro ingegno.

Perchè poi a costoro non mancassero

quelle nozioni di Sito, che i moderni Analisti hanno cercato di stabilire, e talune delle quali sono importantissime al perfezionamento delle Matematiche, fin dalla passata edizione, che a Voi pur ebbi l'onore d'indirizzare, aveva promesso di pubblicare, in seguito del presente, altro Trattato di *Geometria Analitica di Sito*, in cui, senza spirito di sistema, fossero ordinatamente raccolte quelle teoriche di sito alle quali l'Analisi moderna può riescir vantaggiosa. Mi ha però impedito di ciò fare, e tuttavia me lo impediscono le molteplici mie occupazioni, tra le quali principalmente le continue ristampe del Corso di Geometria, e la compilazione di quello di Analisi, del quale mi sto ora validamente occupando. Non mancherò intanto in questo, nel trattar l'*applicazione dell'Algebra alla Geometria*, di piantare i semi delle sopradette dottrine, sicchè breve passo resti poi a dare per completarle.

Spero però questa volta di offrire un gran compenso a' giovani per tale omissione, pubblicando di seguito al presente Trattato l'altro di *applicazione alla teorica delle ombre* del valentissimo allievo di no-

stra Scuola sig. D. Francesco Bruno, al presente professore nella Reale Accademia di Marina.

Che se a voi parrà, che le mie intenzioni non sieno affatto indegne di lode, e che io vi abbia in qualche parte adempito, non troverete fuor di proposito, che, qual segno di antica riconoscenza e di rispetto, le abbia a Voi indiritte. E sovvenghi che in ciò io imito ancora l'esempio di que' primi sommi Maestri, verso i quali Voi col vostro operare e cogl' insegnamenti tanta venerazione m' ispiraste. Nè io, volendo seguire sì degno loro costume, potea ad altri rivolgermi, che al restitutore dell' antico geometrizzare in queste nostre partenopee contrade, ed al fondatore in esse di una Scuola ove i metodi dell' antica e moderna analisi vi sono con pari studio coltivati, e nella quale non pochi dotti Napolitani si sono addestrati nella palestra matematica, di talun de' quali vi sia grato, che io ricordi talvolta il nome in questa mia opera, recando qualcheduna delle sue utili meditazioni.

x

Gradite intanto i sentimenti della mia
riconoscenza, e del profondo rispetto con
cui ho l'onore di essere.

Napoli 1. Marzo 1821.

Umiliss. Rivotiss. Serv. ed Amica

VINCENZO FLAUTI.

INTRODUZIONE,

E DISEGNO DELLA PRESENTE OPERA /



La diversità del titolo di un libro non prova, ch'esso sia sostanzialmente diverso da un altro: ma quale ch'ella siasi la materia che dee trattarsi, è necessario il darlo preciso, ed in modo da non farsi, che tale scienza diventi un mistero per colui, che non ne ha cognizione veruna. Furon forse queste le ragioni, che indussero il Signor Lacroix, Geometra che mette molta precisione ed esattezza ne' suoi lavori, a denominar *Geometria su i piani e le superficie curve* quello stesso ramo di Geometria, al quale egli, ed il Signor Monge avevano contemporaneamente avuto parte per ridurlo in forma scientifica, e che quest'ultimo aveva chiamato *Geometria Descrittiva*. In verità qual'è l'idea, che dovrà formarsi anche un Geometra al sentirsi annunziar *Geometria Descrittiva*, quando non sia preventivamente informato dell'oggetto di questa scienza: e, quello ch'è più, quando le definizioni che di essa possono darsi, nè pur s'intendano, se prima uno non siasi alquanto inoltrato in apprenderla, e se non abbia l'abitudine alle sue costruzioni.

Ma se il titolo scelto dal Lacroix è men vago di quello del Monge, esso però non parmi ancora abbastanza preciso, nè tampoco può da esso rilevarsi qual sia l'argomento speciale di questo nuovo ramo di Geometria. E se nelle cose geometriche si può considerare il loro sito, la grandezza, il rapporto, e la figura, resterà sempre dubbio, ed indeterminato quali di queste cose s'imprendano a trattare in esso. Queste ragioni mi spinsero nel 1815, allorchè pubblicai il Trattato che ora ristampo, a denominarlo *Geometria di Sito sul piano, e nello spazio* (*) e senza, che io ne vada mostrando la convenienza coll'oggetto di cui trattasi, e la facilità a comprendere qual sia, ciascuno potrà vederlo da se medesimo.

Ma non è solamente il cambiamento del titolo che distingue questo libro delle opere sopradette, e dalle altre che l'hanno seguito; un'altra differenza grandissima vi è nell'essenza e condotta di esso, che rende la presente Opera quasi che interamente nuova, sebbene concerna l'argomento medesimo che in questa si tratta.

La *Geometria Descrittiva* aveva per oggetto la determinazione del sito delle cose geometriche nello spazio, per mezzo de' loro convenevoli de-

(*) Il primo saggio che diede di un'Opera di questo genere fu nel 1807, per la quale ritenni anch'io l'intitolazione di *Geometria Descrittiva*.

terminanti su' piani dati. Or, chi non vede che il rigor geometrico, e l'esattezza che dee porsi nel lo scrivere elementi esigea, che prima si fosse ben fissata quest'idea astratta di sito, che formava il fondamento della scienza, e che poi si fosse anche stabilito in qual modo poteva fissarsi il sito di que' determinanti in un piano. Senza questa preventiva cognizione, ognuno ben comprende, che i Problemi della moderna *Geometria Descrittiva* resterebbero sempre imperfettamente determinati, ed incapaci di una comoda, ed elegante costruzione.

Io dunque nel primo capitolo della presente mia opera ho esposte distintamente, e per quanto convenivasi le cose poc' anzi dette; e poi negli altri ho comprese in tante *Proposizioni di dati* le principali teoriche di sito nello spazio, cioè ho esposti i convenevoli determinanti de' punti, delle linee rette e delle superficie nello spazio, su' piani dati. E queste teoriche di sito le ho poi applicate nel quinto Capitolo alla soluzione di alcuni importanti problemi, la maggior parte de' quali non è senza uso nelle seguenti ricerche.

Con questo metodo, che ora ho tenuto, non solamente mi sono uniformato, in un'opera di pura *Geometria*, al metodo degli antichi Geometri, rendendo così questa nuova scienza degna di aver parte nella serie de' libri d'istituzione geometrica ch'essi ci hanno lasciati; ma ho potuto anche esporre le teoriche di sito in una maniera più facile a comprendersi, ed a ritenersi. Or per evitare ne' giovani quella confusione d'idee che sogliono produrre in

loro quelle voci delle quali, sebbene per l'avviamento che hanno nelle scienze geometriche, per che ne intendano il significato, pur tuttavia non possono di esse comprenderne interamente la forza, stimo quì opportuno di prevenirli, che per *dato*; o *proposizione di dato* s'intende ogni teorema nel quale proponesi a dimostrare, che sia data qualche cosa, la quale ha un rapporto determinato con quelle altre cose, che sono date per ipotesi. Quantunque però si sia detto esser tali proposizioni de' teoremi, pur tuttavia esse possono anche enunciarsi in forma di problemi, proponendo di ritrovare quelle cose, che dovevansi dimostrare date. Il che facendo, la dimostrazione del dato proposto come teorema sarà l'analisi geometrica del problema. Quindi si rileva anche; come possa farsi uso delle determinazioni delle proposizioni di dati, esposte come teoremi, quando esse debbono far parte delle costruzioni pe' problemi di sito, ne quali se ne ha bisogno.

Or quantunque in questo ramo di Geometria non si tratti che di dati di sito, pur tuttavia la determinazione di essi è sì strettamente legata a quella degli altri dati, che non posso fare a meno di dar quì una leggerissima idea anche di questi; inviando i giovani, che ne vogliono essere completamente istruiti, al libro de *Dati* di Euclide (*).

(*) Tra le diverse esposizioni date di tal libro di Euclide, la più commendabile è quella di Roberto Simson.

Dirò dunque, che il *dato geometrico* consiste nell'assegnare una qualche cosa per mezzo di operazioni che la Geometria somministra. Ed essi *dati* distinguonsi in quattro generi, cioè di *grandezza*, di *ragione*, di *specie*, e di *sito*:

Si dice *data di grandezza* una quantità geometrica, se per mezzo di una nota costruzione di Geometria le se ne può assegnare un'altra uguale: così è dato di grandezza un triangolo, se n'è data la sua base e l'altezza, o pur se ha i lati dintorno ad un suo dato angolo reciprocamente proporzionali a due linee rette date; poichè l'uno e l'altro di essi si può geometricamente assegnare, il primo per la 35 del 1°. libro degli Elementi, e l'altro per la 15 del VI°. E così pure è dato di grandezza un cerchio, se n'è dato il raggio; ed è dato di grandezza un angolo solido, se sono dati gli angoli piani che lo comprendono; poichè per lo postul. 3. si può assegnare quel cerchio, ed un tal angolo si può costituire per mezzo della 23. El. XI.

E dagli esempi rapportati si potrà rilevare, che i dati geometrici di grandezza possono anche andar disgiunti dal valore della cosa, che si dice data, cioè a dire, che potrà esser data geometricamente una cosa, tuttochè affatto non si possa determinare il suo vero valore; tal'è il cerchio che, come si è detto, è dato di grandezza, se è dato di grandezza il suo raggio, benchè da questo non si possa esibire il valore esatto di quello.

Una *ragione* si dice poi geometricamente da-

ta, se possiamo, per mezzo di una costruzione di Geometria, esibir due grandezze, le quali abbiano fra loro una tal ragione, e per l'eleganza dell'esibizione conviene, che queste sieno due linee rette. Ed egli è chiaro perciò, che se è data una ragione, può sempre formarsene un'altra uguale, che abbia un dato antecedente.

Dalla definizione data si rileva, che una ragione geometrica può esser data, tuttochè non si sappia il suo esponente, o pur che questo non si possa assegnare; come avviene allorchè i termini di tal ragione sono incommensurabili tra loro. E sarà facile poi il rilevare, che essendo data una ragione geometricamente, sia anche data quella, che si ottiene invertendola, componendola, dividendola, e convertendola, e che ne sia di più data la sua duplicata, triplicata, *ec.* Ed in generale che essendo date più ragioni geometriche, sia anche data quella che da esse si compone: poichè tutte queste cose sono di facile esibizione per mezzo di alcune proposizioni del V°. , e del VI°. degli Elementi.

Inoltre una *figura* si dirà *data di specie*, se le se ne può esibire un'altra simile.

Così un triangolo sarà dato di specie, se sono dati due suoi angoli; o pur un angolo e 'l rapporto de' lati dintorno ad esso; o il rapporto di un lato a ciascuno degli altri due: poichè facilmente gliene potrà costituire uno simile (4, 5, 6.El.VI.). E così pure un parallelepipedo sarà dato di specie se sien dati i rapporti di tre suoi lati din-

torno ad un angolo , il quale sia dato di grandezza , cioè sia contenuto da tre angoli piani dati.

Quali dati si dicano di *sito* , sarà detto a sufficienza nel principio del Cap. I. di questo Trattato.

I dati , di cui si è parlato , possono combinarsi anche tra loro in modo tale da formare delle cose date nel tempo stesso di grandezza e di specie , di grandezza e di ragione , di grandezza e di sito , di specie e di sito ; o pur potranno combinarsi tre a tre , o anche tutti quattro insieme ; e da queste combinazioni si traggono infinite utilissime conseguenze per la teorica de' dati. Noi qui faremo solamente notare , poichè ci occorrerà di farne uso in appresso , che un triangolo sarà dato di specie e di grandezza, se sono dati due suoi angoli , ed un lato qualsivoglia ; o pure un angolo ed i due lati che lo comprendono ; o finalmente i tre lati : e la ragione è facile ad avvertirsi anche da coloro che conoscono gli Elementi di Geometria Piana solamente.

Ma ritornando da questa digressione ad esporre il sistema di questa mia opera , farò avvertire che nel Capitolo V. ho trattato de' determinanti del sito di alcune superficie curve , cioè delle superficie coniche , cilindriche , e di rivoluzione , riservandomi a trattare altrove , e nel proprio loro luogo , le stesse ricerche per un'altra famiglia estensissima di superficie curve delle quali farò tra poco parola. Ho preferito questa volta il metodo di procedere per induzione in esibir questi determinanti , rinunziando al sistema di stabilire un pri-

cipio generale, come altra volta feci (*), e come trovasi praticato dal Monge, e dagli altri Geometri descrittivi; perchè questo metodo particolare, e procedente per csempj mi è sembrato più comodo ed agevole, e meno atto ad indurre in equivoco nelle particolari applicazioni; e son sicuro che quando il bisogno lo richiegga, o pur quando si voglia anche farlo per pura speculazione, ognuno sarà nel caso di assegnare i determinanti del sito di una superficie curva per se stesso immaginata, con più facilità di quella, che gliene potrebbe venire se dovesse usar la regola generale, che, come ho già detto, l'altra volta assegnai.

Ed in questo incontro ho fatto rilevare di passaggio, ciò che forse in altro luogo mi riuscirà di provare più di proposito, cioè, che per retta via non procedono coloro i quali, quasi recandosi a scorno di far servire la Geometria a se stessa, vogliono indagare con la pura Analisi algebrica le affezioni delle teoriche di sito, che riguardano principalmente l'ultima specie delle superficie suddette. Essi pervengono così non solamente, per mezzo di lunghissimi giri, a risultamenti che la Geometria facilmente mostra a chi sa farne la sua guida; ma spesse volte questi risultamenti sono di tal grado di astrazione, che diventano incostruibili, ed anche inconcepibili.

Io non so da chi debba ripetersi questo tra-

(*) Negli *Elementi di Geometria Descrittiva* pubblicati nel 1807.

viamiento dal retto sentiero d'inventare e dimostrare in Geometria; ma sicuramente ch' esso è pernicioso alla Gioventù, alla quale oggigiorno non si fa altro che empir la testa di nomi ampollosi e di formole, delle quali non sa usare nelle particolari applicazioni, e che poi dimentica un momento dopo di averle imparate a memoria; giacchè essa nessun nesso di ragionamento geometrico si forma sopra di quelle nella mente, come nessun nesso vi è tra astrattissimi simboli, e costruzioni di Geometria. Noi ne vogliamo troppo veramente da' giovani: è già molto che il loro spirito si assuefaccia a mandarci buone come verità di Geometria quelle che si sono rilevate con pure operazioni algebriche, partendosi però da una verità esposta in figura, cioè dal risultamento di una costruzione; e che perciò può loro facilmente anche indicarsi, come quel cammino analitico possa passo passo rapportarsi a passaggi di Geometria. Ma pretendere ch' essi si convincano interamente di un risultamento analitico, che dee corrispondere ad una verità geometrica incomprendibile in figura, è una stranezza, che mostra come a gran passo noi stiamo travagliando per far decadere le Matematiche per troppo innalzarle. Ritorniamo dunque un poco indietro, se vogliamo arrestar questo male, e seguiamo nell' applicar l'Analisi alla Geometria in questo genere di ricerche quel vero metodo, che il Newton, l'Eulero, il Cramer, ed altri dotti Analisti ci hanno segnato.

Nel Capitolo VI. ho trattato della costruzione

delle superficie curve. Un tal argomento, nella prima edizione della Geometria Descrittiva lo aveva accoppiato alle altre ricerche in cui se ne aveva bisogno; essendo però esso ora divenuto più completo, che allor non era, non poteva tuttavia trovarsi con quelle associato, ed era questo il luogo ove bisognava trattarne. Dopo ciò ne' seguenti Capitoli, cioè VII., VIII. e IX. ho trattato de' contatti delle superficie, distribuendoli nel seguente modo. Nel VII., dopo alcune ricerche preliminari necessarie all'oggetto, ho risolti i problemi de' contatti di un piano colle superficie cilindriche e coniche; nell'VIII. ho trattato de' contatti di un piano con una o più sfere, e con una superficie di rivoluzione, e nel IX. finalmente de' contatti circolari e sferici. Queste ultime ricerche trattate recentemente con grandissimo sfoggio di speculazioni, e per mezzo di ripieghi complicatissimi, come si potrà vedere nel Supplemento del Signor Hachette alla Geometria Descrittiva del Monge, e nella Corrispondenza della Scuola Politecnica di Francia, si troveranno quì esposte in una maniera assai semplice, e con un metodo geometrico fondato sopra di una nuova proprietà del triangolo fatta rilevare in esso, per le vie elementari, dal nostro insigne Matematico Signor Nicola Fergola. E per incidenza si troveranno anche in questo Capitolo dimostrate alcune nuove proprietà de' cerchi e delle sfere che s'intersecano, e risoluto in doppio modo uno de' problemi più importanti sulla piramide triangolare.

Il Capitolo X. conterne la *costruzione* del-

L'intersezione delle superficie curve, cioè cilindriche, coniche, e di rivoluzione. Seguendo un metodo più generale, ed inverso di quello finora tenuto da' moderni Geometri Descrittivi, ho io derivata la costruzione dell'intersezione di tali superficie curve con un piano di sito, dall'altra dell'intersezione di ciascuna di esse con una data superficie cilindrica; ed ho anche reso l'argomento di questo Capitolo assai più completo di quello ch'era finora; alla qual cosa hanno contribuito alcuni importanti lemmi de' quali trovasi arricchita una tal teorica.

Lo stretto nesso che ha coll'argomento di questo Capitolo la teorica de'determinanti del sito delle linee curve nello spazio, mi ha impegnato a trattar siffatte ricerche nel Capitolo XI., nel quale ho fatta riviver l'idea delle spirali, che gli antichi considerarono descritte nella superficie del cilindro, del cono, e della sfera. E nel Capitolo seguente, ch'è il XII. del presente Trattato ho esposte le principali proprietà della prima delle suddette spirali chiamata cilindrica, o Apolloniana, derivandole dalla sua semplice genesi.

Nè ciò ho fatto per pura speculazione, e come applicazione delle teoriche astratte del Capitolo precedente; ma anche pel gran vantaggio che da questa curva può trarsi, impiegandola convenevolmente, come gli antichi facevano, nella risoluzione de' problemi ipersolidi; e per l'uso che può farsi di essa nelle arti di costruzione e del disegno.

Il Capitolo XIII. ha per oggetto un'altra curva a doppia curvatura, la cui invenzione si appartiene

a' tempi nostri, ed è questa l'*epicicloide sferica* di Ermano. E per dare alle considerazioni geometriche che sopra di essa distendo, concernenti l'argomento di questo Trattato, quella geometrica esattezza ch'era necessaria, e che invano desideravasi finora nelle opere di que' Geometri che di tal curva hanno similmente trattato, ho in doppio modo risoluto il Problema di *dividere un arco o un angolo dato in data ragione*, cioè una volta adoprando la spirale cilindrica, e nell'altra la cicloide Galileana, i quali due metodi elegantissimi per risolvere un tal problema si appartengono a' bei tempi della Geometria nella Scuola del Galilei, essendo l'opera del suo ultimo e dotto discepolo Vincenzo Viviani.

Ad oggetto poi di mostrare di quanta importanza e vantaggio la teorica delle intersezioni delle superficie curve possa riuscire anche nelle ricerche di pura Geometria, ho raccolti nel Capitolo XIV. molti problemi, la cui natura o esigea assolutamente, o gli rendeva atti ad essere in convenevol modo composti per mezzo dell'intersezione di alcune superficie curve. Un tal metodo di composizione geometrica usato dagli antichi, per la costruzione de' problemi solidi, per mancanza di mezzi onde descriver le curve coniche in un piano, meritava di comparire ora alla luce, e più utilmente, per la costruzione di alcuni problemi lineari. E nell'introduzione a questo Capitolo ho data un'idea generale de' luoghi alla superficie, e sulla natura de' problemi indeterminati a' quali essi sono

soddisfacenti, intorno al quale argomento molto si era travagliato dagli antichi, che a noi non è pervenuto.

Tra i problemi risolti in questo Capitolo ve se ne troveranno sei sulla piramide triangolare, che unitamente a quello già risoluto nel Capitolo IX. costituiscono i principali a proporsi su questo solido. E per indicare l'importanza di essi, basta dire, che l'insigne analista Signor Lagrange in una sua Memoria inserita negli Atti di Berlino per l'anno 1775, ove si occupò a risolverli, per le vie dell'analisi moderna, fortemente si dolse, che i Geometri i quali si erano convenientemente occupati del triangolo rettilineo, non avessero poi fatto altrettanto della piramide triangolare, ch'è tra i solidi poliedri lo stesso che il triangolo tra i rettilinei. Ma se tal doglianza del Lagrange è giusta, potrebbe anche a lui ragionevolmente imputarsi, ch'egli non abbia soddisfatto ad una tal ricerca come convenivasi, cioè geometricamente, essendo il suo lavoro limitato semplicemente ad offerire gli elementi algebrici onde pervenire all'equazione per tali problemi.

Finalmente si troverà in questo Capitolo riportata l'ingegnosa soluzione di Archita del celebre problema delle due medie proporzionali, la quale ricomparisce ora in luce libera anche dalla taccia d'immaginaria che il Montucla gli avea data.

Per completare la teorica de' determinanti delle superficie curve nello spazio, ho nel Capitolo XV. impreso a trattare di tali cose per un'altra famiglia di superficie curve, che sebbene generate da una

linea retta, non erano però nè cilindriche, nè coniche, cioè di quelle superficie che i Geometri Descrittivi Francesi hanno chiamate *gauches*; che io ne' miei Elementi di Geometria Descrittiva dissi *difformi*, pel carattere che hanno di non conservare nè parzialmente, nè per tutto l'uniformità di curvatura come le coniche e le cilindriche, colle quali convengono nell'aver per generatrice una linea retta; e che finalmente ora ricompariscono col nome di *plectoidi*, che ad esse avevan dato gli antichi geometri. Ed ecco in breve di tali superficie quelle notizie storiche che riguardano la conoscenza che di esse ebbero gli antichi; il qual trattato storico tanto più dovrà interessare, quanto che finora si è ignorato perfettamente da' Geometri cosa fossero queste superficie *plectoidi*.

Nelle Collezioni Matematiche di Pappo si trova due volte fatta menzione delle superficie *plectoidi*, la prima, cioè, nella Prop. XXIX del lib. IV., e l'altra in quella specie di Scolio che segue la Prop. XXX, ov' egli, a proposito del problema della trisezione dell'angolo, entra la seconda volta a parlare de' tre diversi generi in cui gli antichi geometri distinguevano i problemi. Niuno però finora aveva saputo indicare con fondamento cosa fossero siffatte superficie, ed in qual modo generate. Il Commandini nel suo commento al primo de' luoghi citati manifestamente dice, che Pappo fa menzione delle superficie *plectoidi* in appresso, cioè nell'altro de' suddetti luoghi; ma ch'egli non si ricordava di aver mai letto cosa esse fosse-

ro, e perchè così si chiamassero. Ed arriva fino a dubitare che tal voce fosse quì un errore, dovendo dire in *cilindroidi*, in vece di in *plectoidi*. Ma oltre a che noi mostreremo di quì a poco, che non sia com'egli pensa, si vede chiaro non potersi mai sospettare che Pappo abbia voluto dire in *cilindroidi*, mentre la superficie in cui esiste la linea retta, che si dice dal greco autore essere in *superficie plectoidi*, non ha niente di analogo alla superficie di un cilindro, come indicherebbe la voce *cilindroidi*. E molto meno potrebbe dirsi, come lo stesso Commandini soggiugne, *hoc est in cylindrica superficie*, non trattandosi affatto di superficie cilindrica.

Il Montucla poi, a proposito di tali superficie dice, che Pappo le chiama *plectoides*, cioè *complicatae*, e che non è facile d'indovinare sopra sì leggiera indicazione quali erano queste superficie, e quali quelle tante linee che il Geometra Filone Tianeo aveva considerate in esse, scrivendone un trattato.

Il fatto sta, che l'uno e l'altro di questi accorti geometri non si è avveduto, ch'esso aveva innanzi agli occhi, nel primo de' citati luoghi di Pappo, la definizione che cercava; ed io debbo anche ingenuamente confessare, che sono debitore di quest'importante notizia alle sottili considerazioni che ha fatto sopra tal luogo di Pappo il mio dottissimo collega Signor D. Giuseppe Scorza, col quale io ne aveva fatto parola. Ed ecco in qual modo la cosa procede.

Nel citato primo luogo delle 'Collezioni di Pappo si parla da questo geometra di una retta, la quale si dice essere *in superficie plectoidi*, ed al momento stesso si soggiugne: *fertur enim (recta) per rectam lineam BL, et per lineam spiralem positione datam*. Vale a dire ch' egli indica chiaramente, che la superficie in cui si ritrova quella retta, è precisamente quella che vien generata da una linea retta, la quale si appoggia costantemente all'asse di un cilindro retto, ed alla spirale cilindrica segnata sulla di lui superficie, serbandosi sempre perpendicolare a quell'asse stesso, e descrivendo così l'ordinaria superficie curva, che rappresenta quella al di sotto delle scale a lumaca; onde il greco autore ci mostra dalla sua genesi qual fosse la natura di quella superficie curva. E da ciò si vede chiaramente, che per tali superficie curve intendevano gli antichi quelle, che vengono generate da una linea retta, la quale si muove con una data legge radendo una qualunque curva nello spazio. E dal secondo de' succennati luoghi di Pappo si rileva, che questa famiglia innumerabile di superficie curve, per la quale la Geometria moderna non ha stabilito, che poche considerazioni generali di sito, formava per gli antichi una completa dottrina geometrica. Essi in fatti ne esaminarono la natura di molte, per completare i loro trattati de' luoghi alla superficie; e poi trattarono estesamente delle linee curve segnate sopra di esse, non solamente da piani, come dice il Montucla, ma forse anche da altre superficie

curve. Noi dunque dopo tanti secoli, e dopo sì grandi progressi delle Matematiche non siamo pervenuti dal canto nostro, che a restituire può dirsi appena la definizione di tal genere di superficie, in considerar le quali gli antichi avevan tanto progredito. E si vorrà negar poi, che a noi manca ancora molto, perchè in questo ramo importante delle Matematiche vallessimo gli antichi? Dopo tutto ciò, mi è sembrato a proposito di poter almeno restituire a questa famiglia di superficie il loro antico nome.

Or le poche teoriche moderne che le riguardano, si trovano qui non solamente esposte con quell'estensione che si conveniva; ma vi si troverà anche introdotto quel rigore che dovevasi, col dimostrare un teorema fondamentale, che loro appartiene, ed il quale da tutti i moderni si era assunto. E perchè queste tali ricerche non restassero senza una qualche geometrica applicazione, ho trattato nel Cap. XVI. di que' solidi ne quali la sezione perpendicolare all'asse è un triangolo rettilineo, e specialmente del cono-cuneo di Wallis; e ciò che intorno ad esso ho fatto, si potrà facilmente estendere all'intera famiglia de' poc' anzi detti solidi; tra i quali esso è compreso. Ed a questo proposito ho fatto anche rilevare alcune importanti verità intorno alle sezioni prodotte nelle superficie cilindriche da' piani. Nel Capitolo XVII. ho impreso a considerare un altro solido, che mentre è un vero solido di rivoluzione, non essendo che il cilindroide del Wallis, è però suscettivo di una genesi analoga a

quelle delle superficie *plectoidi*. E, per mezzo delle teoriche che stabiliremo sopra di esso, ci apriremo la strada alla soluzione data dal Sig. Monge del Problema di: *Tirare per una linea retta di sito un piano tangente una data superficie di rivoluzione*, la qual soluzione, elegante per la sua composizione geometrica, avea bisogno di esser resa più facile e chiara per l'analisi geometrica corrispondente; il qual motivo forse era stato quello, che avea indotto la maggior parte de' Geometri Descrittivi a trascurare nelle loro istituzioni di questa scienza il suddetto problema, ch'è il principale della teorica de' piani tangenti le superficie curve.

Nel Capitolo XVIII. ho compreso alcune generali considerazioni sullo sviluppo delle superficie curve, esponendo le condizioni geometriche di cui debbono essere fornite, perchè ne sieno capaci. Ed in seguito di ciò ne ho fatta una conveniente applicazione allo sviluppo delle superficie cilindriche e coniche, col mostrare in qual modo su ciascuna delle suddette superficie sviluppato si possa esibire una qualunque curva già segnata nella superficie proposta. Finalmente, ad oggetto di mostrare anche qual uso geometrico possa farsi delle presenti ricerche, ho recata in questo luogo una terza soluzione del problema di dividere un angolo rettilineo, in data ragione, la quale è pure del Viviani, ed eseguita per mezzo della superficie di un determinato cuneo cilindrico sviluppata.

Terminata in tal guisa, per quanto convenivasi, l'esposizione delle generali teoriche di sito, ed

una loro conveniente applicazione, ho creduto a proposito di dovermi rivolgere a' metodi particolari inventati pel risolvimento de' problemi di questo genere. In una materia sì difficile ed incompleta, qual' è quella del sito, non lice lasciar nulla de' tentativi fatti. Ho dunque impiegato il Cap. XIX. nell'esposizione di un nuovo metodo del Signor Fergola, detto di *conversione*, atto a risolvere non pochi problemi di sito, estraendolo da una Memoria da lui presentata, su questo importante argomento geometrico, alla Reale Accademia delle Scienze di Napoli, nell'anno 1786, ed inserito nel primo volume degli Atti di questa pubblicati nel 1788. In seguito ho nel seguente Cap. XX. raccolti problemi di sito risolti con questo metodo dallo stesso Geometra, ed appartenenti a' primi due generi ne quali ha egli classificata questa numerosissima famiglia di problemi.

Dopo ciò nel Cap. XXI. ho distribuiti que' Problemi di sito che restii al metodo sopracennato; possono però ricevere un'elegante soluzione per mezzo di alcuni geometrici lemmi, de' quali non senza ragione si veggono abbondare le opere degli antichi: e del qual genere doveva essere quell'immenso materiale che a' Geometri era apparecchiato ne' tre libri de' porismi di Euclide, ond' è ch' essi gli avevano come: *Opus artificiosissimum in analysis difficultimorum problematum, eorumque generum quorum immensam multitudinem praebebat naturae porismatum*. Tra gli altri problemi di questo Capitolo, vi si troverà risoluto, in due eleganti ma-

niere diverse, quello d' *Inscrivere in un cerchio un triangolo, o anche un poligono qualunque, sicchè i lati di esso passassero per altrettanti punti dati quanti sono i lati di quel rettilineo*, nel risolvere il quale s'impegnarono grandemente i principali Geometri del passato secolo; come sarà detto a suo luogo; insieme con quello analogo che propose l'Eulero sulla superficie della sfera, e con altri affini.

Il Cap. XXII. è poi destinato ad un altro metodo anche del Fergola, detto di *Trasferimento*, che fece egli noto alla stessa Accademia nel 1787, e che riesce utilissimo nel risolvere molti altri problemi di sito.

Finalmente nel Cap. XXIII. vi ho compresi tanti problemi di sito del genere di quelli, che venivano trattati nei due libri *de Inclinationibus* di Apollonio Pergeo, ma universalizzati, e che il signor Fergola, il quale gli ha elegantemente risolti, in modo da occultare anche la loro natura trascendente, ha chiamati *delle Applicazioni* (*). Mi ha spinto a ciò fare, non solamente la natura di sito ch'essi hanno; ma anche la considerazione che possonsi avere come un'ubertosa ed utile raccolta di lemmi, onde risolvere moltissimi difficili problemi di posizione anche ipersolidi, ed in forma di problemi piani.

(*) Veggansi i tre opuscoli di questo Geometra riguardanti un tale argomento, che trovansi inseriti nella Raccolta da me pubblicata nel 1811.

Mi resta a dire anche qualche cosa di alcune Note aggiunte in fine della presente opera, le quali mentre che contengono ricerche affini agli argomenti trattati in qualche capitolo di essa, non dovevano però, a rigore di metodo, aver qui il luogo. Tal' è, per esempio, la nota sul cilindroide de Wallis, nella quale si recano diverse dimostrazioni del teorema proposto dal Parent, per la misura di questo solido, ordite nella Scuola del Signor Fergola. Talune altre di esse han per oggetto dilucidazioni necessarie in alcuni luoghi del Libro, o ulteriori ricerche sopra i medesimi: e queste tali Note si troveranno nella presente edizione accresciute di alcune altre di non lieve importanza.

Ecco tutto quello che io, fin della prima edizione ho fatto in quest'opera, che di nuovo presento al severo giudizio del Pubblico. I Geometri decideranno del merito del mio lavoro, e gli Artisti dotti dell'utilità, che da esso si può trarre, con più fondamento che da altre opere di simil genere finora pubblicate.

Non mi ho permessa alcuna applicazione alla pratica, per timore di non essere troppo superficiale, o anche inesatto, mancando di quelle nozioni di mestiere, che dovevano formare la base di una tale applicazione; e non volendo altronde, nè permettendomelo le mie assidue occupazioni, istruirmi pienamente in cose ch' erano aliene da miei studj: ho quindi lasciata questa parte a coloro, che versati nella moderna Geometria di Sito, conoscono ancora le arti di costruzione, alle quali

essa può esser vantaggiosamente applicata. La presente edizione però sarà seguita da un completissimo geometrico trattato: *Sulla determinazione delle ombre ne' disegni*; lavoro che può dirsi perfetto in tutte le sue parti, di un mio antico e dotto Allievo *D. Francesco Bruno*, al presente Professore nella Reale Accademia di Marina.

Dopo tutto quello che ho finora detto circa la distribuzione dell'opera, non debbo omettere di dir anche qualche cosa del metodo del quale mi sono servito nelle ricerche geometriche che vi si contengono. Siccome esse appartengono alla Geometria di Sito, ognuno perciò comprende che il mezzo da ben riuscirvi era il metodo degli antichi; ed io avrò abbastanza dimostrata quest'asserzione, per coloro, che non sono atti a sentirne la ragionevolezza da loro stessi, recando quì quanto vien detto sulla maniera di trattare i problemi geometrici del dotto Geometra Inglese Samuele Horsley, in fine della sua restituzione de' libri *de Inclinationibus* di Apollonio: *Quam vero inconsulto faciunt, qui in rebus geometricis veterum Analysisi posthabita ad Algebram semper confugiunt, is demum sentiet, qui Ghetaldi constructiones cum hisce nostris contulerit. Figurae scilicet quot quot sunt lineis constant vel pluribus, vel curva fortasse una. Linearum vero plurium, ut et partium ejusdem curvae variarum, relatio duplex est, quantitate enim distinguuntur, et situ. Meras quantitatis relationes, meras autem dico, quae ex situ nullo modo pendent;*

optimo certe compendio *Algebra* expendit, et ex notis ignotas mira facilitate promit. Situs linearum varios dignoscere, et cum alias omnes, tum et ipsius quantitatis relationes, si quae ex situ oriundae, vel lineis ipsis, vel figuris quas lineae claudunt, intercedunt, explorare, id, si fallor, *Geometriae* munus est. In problematibus plerisque solutio ex utraque relatione pendet, situs dico et magnitudinis, vel compendiosius saltem, ex utraque junctim, quam ex hac vel illa seorsim efficienda est. Positiones vero linearum diversas, intersectiones, contactus, angulos, flexuras, et quae plurima inde forte consequantur, quae vix fieri potest, ut prudentiorem paullo *Geometriam*, vel adeant, vel fugiant, calculus saepissime praeterire solet. Unde haud raro evenit, ut qui aequationibus concinnandis nimium se delectari sinant, exitu operis, quod brevi sane, et nullo fere negotio conficiunt, in constructiones aut nullas plane incidunt, aut perplexas adeo, et laboriosas, ut omni prorsus utilitate careant. *Algebrae* autem is demum legitimus erit in *Geometria* usus, si in rebus calculi solis adhibeatur. Neque tamen *Geometris* auctor essem, ut eo studium atque artem potissimum impendant, ut ad calculum rem quamque propositam deducant. Immo contrarium suadeo. Constructiones enim simplicissimas, et facilissimas esse quae ex positionibus partium figurae petitae sunt, multiplex me experientia docuit. Sed cum indagare rite

instituta, omnibus datorum, et quaesitorum, tam situs, quam magnitudinis, relationibus diligenter perpensis, et tandem sua quasi sponte res devenerit, ut mero calculo ulterius proseguenda sit, nollem sane, coeca adeo veneratione, antiqua complecti, ut in tali negotio recentiora Algebrae compendia ingratus spernerem. Neque minus imperite et inepte faciunt, meo quidem iudicio, qui in rebus calculi Algebra uti nolunt, quam qui in rebus graphicis, Geometria, id est graphices scientia, multum valere jussa, maxima quaeque problemata mero calculo aggressi, Geometrarum munere praeclare se defunctos existimant, dummodo aequationes utcunque concinnaverint.

Ma se l' Horsley voleva mostrar la superiorità della Geometria sull' Analisi nelle soluzioni de' Problemi delle Inclinazioni, col semplice confronto di quelle ch' esso ne aveva recate, per le vie della Sintesi, a quelle poche, che coll' Analisi moderna ne aveva dato il nostro Ghetaldo, le quali non pertanto conducevano a risultamenti costruibili; che non dovremmo dire noi al presente, che si pensa, che una quistione geometrica non sia ben risolta, se non quando meno di Geometria in essa appare; ond' è poi, che la sua costruzione riuscendo difficile a ravvisarsi, non più vedendosi le tracce dell'orditura geometrica involupata in mezzo ad analitiche espressioni delle locali del Problema, si abbandona la risoluzione di questi alla semplice equazione, trasgredendo quel precetto delle greche

Scuolè, cioè che *Problema est propositio in qua aliquid faciendum et construendum proponitur*(*). E talvolta nè pur si perviene all'equazione, spaventati dalla lunghezza di essa, prodotta dal frequente e necessario uso delle eliminazioni, o pur una se ne ottiene, dalla quale mai più la natura del Problema, se non per lunghi giri, e metafisiche ricerche si può rilevare. E di tutto quello che poc' anzi ho detto, sono varj gli esempj nelle opere de' moderni colti autori della Geometria Analitica. A costoro che sono fuori del cammino geometrico potrei ricordare, che il sommo Eulero non pensava com'essi, e che al contrario forte insisteva, che un problema fosse compiutamente costruito, e con eleganza, per dirlo risoluto. In fatti nella II.ª Parte del volume dell' Accademia di Pietroburgo per l'anno 1780, troviamo detto dal Lexell, che quest' insigne Geometra, parlando della soluzione del Problema del Cramer fatta colla moderna analisi dal Lagrange, si duole, che le espressioni alle quali questo sommo Analista, con una destrezza veramente ammirabile, e degna del suo perspicace ingegno, era pervenuto, non erano forse costruibili. Ed eccone in comprovazione le parole stesse del Lexell: *Cum illustris Eulerus de hoc problemate sermonem injiciens, dixisset se dubitare, utrum ista solutio analytica illustris de la Grange, quam in volumine Actorum Bero-*

(*) Pappo *Collect. Math.*, Lib. III. in princ.

linensium, pro anno 1776 recensuit cel. Ca-
stillon, ad aliquam expeditam, et concinnam
constructionem geometricam perducatur, id qui-
dem me permovet ut disquirerem, utrum ejus-
modi constructio inde derivari possit, nec ne.

Ed altrove lo stesso Eulero in un altro volume della citata Accademia, per l'anno 1790, in occa-
sione della soluzione ch'egli ivi dà del Problema
de' tre cerchi da farsi toccare da un quarto, ripi-
glia: *Verum quia hoc Problema est geometricum,*
non tam calculus numericus, quam constructio
geometrica desiderari solet; il che se avessero
veduto alcuni moderni analisti, non si sarebbero
azzardati a produr fuori le loro soluzioni del sud-
detto problema, come han fatto.

E tutto il fin quì dichiarato potrà bastare a
guarentire la ragionevolezza del metodo da me
impiegato nella presente opera, per le già dette
geometriche ricerche.



I N D I C E

DE' CAPITOLI.

Per rendere questo Trattato utile a coloro, che dovranno farne uso per una prima istituzione di Geometria di Sito, segnerò con un asterisco que' Capitoli di esso, che sono necessarij a tal primo insegnamento, cioè nel seguente modo (*); potendo l'apprendimento de' rimanenti servire a quegli altri, che desiderano di addestrarsi completamente nell'invenzione geometrica pe' Problemi di sito.

Paragr. Pag.

(*) INTRODUZIONE E DISEGNO DELLA

PRESENTE OPERA

XI a XXXVI

DEFINIZIONI E NOZIONI PRELIMINARI I a 6 1 a 2

(*) CAP. I.	De' Determinanti del sito de' punti, delle linee e di alcune figure nel Piano.	7 » 21	3 » 9
(*) CAP. II.	De' Determinanti del sito de' punti, delle linee rette, e degli angoli nel- lo spazio.	22 » 59	10 » 25
(*) CAP. III.	De' Determinanti del sito de' piani, delle linee cur- ve che esistono in essi, degli angoli solidi, e de' poliedri nello spazio.	60 » 85	26 » 43
(*) CAP. IV.	Applicazione delle preceden- ti teoriche alla soluzione di alcuni Problemi.	86 » 100	44 » 56
(*) CAP. V.	De' Determinanti del sito delle superficie curve nel- lo spazio.	101 » 115	57 » 62
(*) CAP. VI.	Della maniera di costrui- re una superficie curva data di sito.	116 » 121	63 » 67

	Parag.	Pag.
(*) CAP. VII. De' piani tangenti le superficie cilindriche e coniche.	122 » 138	68 » 73
(*) CAP. VIII. De' piani tangenti le superficie di rivoluzione.	139 » 156	74 » 86
CAP. IX. De' contatti circolari e sferici.	157 » 174	87 » 109
(*) CAP. X. Dell' intersezione della superficie curve.	175 » 197	103 » 122
(*) CAP. XI. De' Determinanti delle linee curve nello spazio; e de' principali problemi che si possono risolvere intorno ad esse.	198 » 215	123 » 128
CAP. XII. Ricerche geometriche sulla spirale cilindrica.	216 » 231	129 » 137
CAP. XIII. Dell' epicloide sferica.	232 » 250	138 » 150
CAP. XIV. Di alcuni problemi geometrici risolti per mezzo de' luoghi alla superficie.	251 » 280	151 » 175
(*) CAP. XV. Delle superficie plectoidi.	281 » 302	176 » 188
CAP. XVI. Di que' solidi ne' quali la sezione perpendicolare all'asse è un triangolo rettilineo; e specialmente del cono-cuneo di Wallis.	303 » 330	189 » 198
CAP. XVII. Del Cilindroide	331 » 359	199 » 218
(*) CAP. XVIII. Considerazioni generali sullo sviluppo delle superficie curve	360 » 376	219 » 228
CAP. XIX. Nuovo metodo del Signor Fergola per risolvere alcuni problemi di sito, detto di conversione	377 » 390	229 » 238
CAP. XX. Problemi di sito del primo, e del secondo genere risolti per mezzo del principio di conversione del Signor Fergola		
PROBLEMI DEL PRIMO GENERE.	391 » 401	239 » 246
PROBLEMI DEL SECONDO GENERE.	402 » 404	246 » 248

	<i>Parag.</i>	<i>Pag.</i>
CAP. XXI. Di quei problemi di sito che risolvonsi per mez- zo di lemmi.	405 = 424	249 = 262
CAP. XXII. Altro metodo del Sig. Fer- gola per risolvere alcuni problemi di sito, detto di Trasferimento.	425 = 433	263 = 269
CAP. XXIII. Problemi diversi delle Ap- plicazioni proposti, ed e- legantemente risolti dal Signor Fergola.	434 = 466	268 = 287.
NOTE GEOMETRICHE		289

ERRATA

Delle cose più essenziali

Pag. 11. lin. 4 per equivoco si trova questa proposizione, che doveva esser le IX, anche segnata per VIII.

53	10	c	τ	θ
	27	a	φ	
55	8	c	ε	
56	9	c'd	c'd	
61	10	Da	da	
	24	ab'	ab	
62	2	col	sul	
68	11	Def. XIX	Def. XIV.	
73	18	l'una l' altra	l'una e l' altra	
79	11	a, e	b, c	
80	1	Prop. LVIII.	Prop. LVIII.	
83	2	fTVP	fTVP	
	5	fF'	fF'	
	24	G	C	
86	31	e	e	
97		In questa sono ripetuti i §§		165, 166, 167.
132	30	precedente	antecedente	
234	24	PS	Pz	
	25	ST	xy	
142	20	A	R	
160	9	La sig, sul Lemme e' l' 81		
179	21	s	Z	
181	25	n'Na'	n'Na	

GEOMETRIA

DI SITO

SUL PIANO, E NELLO SPAZIO.

DEFINIZIONI, E NOZIONI PRELIMINARI.

1. *Def.* 1. **L**o spazio è un'estensione di tre dimensioni illimitata, e similare.

2. *Scol.* Da questa definizione dello spazio, e dall'altra del piano data da Euclide, considerandolo però come interminato, risulta, che le parti di un piano, e quelle dello spazio sieno indiscernibili; che perciò niuna delle cose esistenti in ciascuno di essi si potrà distinguere rapportandola alle loro parti; o sia queste non potranno mai essere un mezzo da far distinguere l'uno dall'altro due oggetti geometrici identici, che si trovino in essi.

3. *Def.* 11. Per *sito* o *posizione* di un oggetto geometrico, in un piano, o nello spazio, s'intende la determinata ed invariabile maniera di esistere di un tal oggetto, per rapporto ad altre cose geometriche, che sono già stabilite nel piano stesso, o nello spazio medesimo.

Siffatta maniera di esistere , appartenendo a quel tale oggetto , non può competere , che ad esso solo , per rapporto alle cose geometriche fissate ; e quindi è incomunicabile a qualunque altro oggetto non suppongasì essere nello stesso luogo del proposto.

4. *Scol.* Le cose geometriche fissate , per mezzo delle quali si vuol conoscere il sito di un oggetto geometrico , conviene che sieno le più semplici ch'è possibile ; per cui se trattasi di determinare il sito di una cosa geometrica nel piano , non possono essere che punti , o linee rette , e trattandosi di determinarlo nello spazio possono essere anche piani.

Similmente gli oggetti , che si vogliono determinare , cioè de' quali si vuol conoscere il sito , se ciò è nel piano , possono essere o altri punti , o linee , o figure piane di qualsivoglia specie : e nello spazio possono inoltre essere anche superficie di qualunque solido o pur linee risultanti dall' intersezione di queste.

5. *Def.* 111. Un oggetto geometrico si dirà *Dato di sito* in un piano , o nello spazio , se siasi geometricamente definita l' invariabile sua maniera di esistere cogli altri oggetti fissati nel piano stesso , o nello spazio ; e quindi se esso si può geometricamente esibire .

6. *Def.* iv. Gli oggetti fissati nel piano , o nello spazio , da' quali risulta il sito di un altro , diconsi *determinanti* del sito di questo

CAP. I.

DE' DETERMINANTI DEL SITO DE' PUNTI, DELLE LINEE, O
DI ALCUNE FIGURE NEL PIANO.



PROP. I. TEOR.

7. *Se sono fissati due punti in un piano, sarà dato il sito, e la grandezza della linee retta che gli congiunge.*

Ciò è manifesto dalla precedente definizione 3, e dal postulato primo di Euclide.

PROP. II. TEOR.

8. *Se è dato di sito un punto in un piano, sarà anche data di sito la circonferenza di quel cerchio, che ha per centro un tal punto, ed un raggio di data grandezza.*

Imperocchè non potendosi descrivere, con quel centro ed intervallo, che un solo cerchio; è chiaro, che la circonferenza di questo ha, per rapporto al suo centro, una determinata maniera di esistere, la quale è incommunicabile a qualunque altra circonferenza si descrive col centro stesso; che perciò essa dovrà esser data di sito. (def. 3.)

PROP. III. TEOR.

9. *Se è dato in un piano il sito di due linee, che s'intersecano; saranno anche dati di posizione i punti del loro scambievole incontro.*

Ciò è chiaro dalle definizioni 2. e 3.; ed è poi stato assunto più volte dall'accuratissimo Euclide ne' suoi Elementi, e lo è continuamente da tutt' i Geometri nelle costruzioni de' Problemi, che da essi si risolvono.

PROP. IV. TEOR.

10. *Se in un piano sieno fissati due punti; sarà dato di sito quell' altro punto, che serba distanze date da ciascuno di essi.*

Poichè essendo date le distanze di questo terzo punto da ciascuno de' fissati, saranno date di sito le circonferenze di que' cerchi, che hanno per centro i punti fissati, e per raggi rispettivi le distanze date (pr. 2.), in ciascuna delle quali, com'è chiaro, dee esistere quel terzo punto: che perciò questo sarà uno di que' due ne' quali s'intersecano tali circonferenze; e quindi sarà dato di sito. (pr. 3.).

11. *Cor.* Adunque sarà dato il sito di un punto in un piano, per rapporto ad una linea retta, che si è in questo stabilita, se tal punto serba distanze date da ciascuno di due altri, che si fissano in quella linea retta.

12. *Scol.* I due punti dati, e le distanze date sono i determinanti del sito di un punto sul piano (def. 4.). Queste distanze debbono però essere tali, che i

cerchi con esse descritti, e che sono le locali del punto da determinarsi, o s'interseghino, o almeno si tocchino; il che è facile a rilevarsi quando abbia luogo.

In appresso non si farà menzione di questa suscettibilità de' dati, quando essa si rileva con facilità dagli Elementi.

PROP. V. TEOR.

13. *Se è dato in un piano il sito di un punto per rapporto ad una linea retta fissata in esso; dovrà essere anche dato: I. il sito e la grandezza della perpendicolare, che da tal punto si abbassa su quella linea retta; II. il sito della parallela che a questa si tira per un tal punto; III. ed il sito e la grandezza di qualunque altra linea retta s'inclina alla proposta in un angolo dato, e passa per lo dato punto.*

Part. 1. Imperocchè se, centro A, il punto dato (fig. 1.), intervallo qualunque AD, (il punto D si suppone preso al di là della retta BC) si descriva il cerchio EFD; saranno dati di sito i punti E, F ne quali s'intersecano il cerchio e la linea retta (pr. 3.); e quindi di sito, e di grandezza la linea retta EF (pr. 1.), e perciò di sito il suo punto medio G. Laonde sarà data di sito, e di grandezza la linea retta AG, che unisce i due punti dati A, G (pr. 1.), la quale è perpendicolare alla BC (14. El. 1.).

Part. 2. Inoltre poichè dal punto A non si può tirare alla AG, che una sola perpendicolare AL; perciò sarà dato il sito di questa per rapporto alla AG (def. 3.); e quindi per rapporto alla BC, alla quale essa AL è parallela.

Part. 3. Ed inclinandosi da A sulla BC una linea

l'angolo, e verso la parte stessa, per rapporto ad uno de' lati di esso, ov'è l'altro lato, può comprendere con quello l'angolo stesso, che vi comprendeva questo.

P R O P . VII. T E O R .

16. *Se in un piano sieno fissate due linee rette ad angolo; sarà dato il sito di ogni punto, di cui è data la distanza da ciascuna di esse.*

Sieno AC, AB tali linee rette (fig.3.), e dal punto dato A, ove s'intersecano, s'intendano elevate sopra di esse rispettivamente, e dalla stessa parte, le perpendicolari AD, AE uguali la prima alla distanza, che un punto si suppone serbare dalla AB, e l'altra a quella che lo stesso serba dalla AC; saranno dati di sito i punti D, E: laonde anche di sito saranno date le parallele DM, EN tirate per que' punti alle AB, AC rispettivamente (pr. 5. part. 2.); e perciò sarà dato per rapporto alle AB, AC il sito del punto X, ove queste s'intersecano (pr. 3.), il qual punto è il proposto.

17. *Scol.* Se l'angolo delle AB, AC fosse retto, le AD, AE verrebbero ad esser tagliate vicendevolmente sulle AC, AB; ond'è che l'esibizione del punto proposto riuscirebbe più semplice: che perciò tutte le volte, che le due linee rette ad angolo; alle quali si rapporta un punto di cui si vuole esibire il sito, si possono prendere ad arbitrio, giova prenderle ad angolo retto.

18. *Scol. 2.* Queste linee rette di sito AB, AC, poste ad angolo, diconsi ordinariamente *assi*, o *direttrici*, e si dà loro il nome di *ortogonali* o *obliqui*, secondo che comprendono un angolo retto, o pure obliquo.

PROP. VIII. TEOR.

19. *Se in un piano, sieno dati tre punti sarà dato il sito e la grandezza di quel triangolo, che si ottiene congiugnendoli; e sarà di più data la sua specie, cioè gliesene potrà costituire un altro simile.*

Imperocchè essendo dati di sito que' tre punti; sarà data di sito, e di grandezza la linea retta che unisce due di essi (*pr. 1.*), come anche la grandezza della perpendicolare che si tira su tal congiungente dal terzo punto (*pr. 5. part. 1.*): e queste due linee rette sono la base e l'altezza del triangolo che si ottiene congiugnendo i tre punti dati; che perciò la sua grandezza sarà data (*37. El. 1.*): e sarà anche dato il sito di esso; poichè è dato quello di ciascun suo lato. E siccome questi comprendono angoli dati (*pr. 6.*); si potrà perciò costruire un triangolo simile al predetto; e quindi esso sarà anche dato di specie.

20. *Cor. Adunque sarà dato di sito, di grandezza e di specie quel rettilineo, che risulta dal congiungere più punti dati in un piano, tre de' quali non sieno mai per dritto, ciascuno una sola volta con un altro: poichè si è dimostrato che di sito, grandezza e specie sono dati que' triangoli ne' quali un tal rettilineo si divide.*

SCOLIO GENERALE.

21. Le poche verità che si sono stabilite sulla teorica del sito nel piano de' punti, delle linee, e di quelle figure di cui trattasi negli Elementi di Geometria Piana, sono sufficienti a far acquistare un' esatta nozione del si-

to nello spazio, di cui or ora passeremo ad occuparci, che perciò eccederemmo inutilmente il nostro scopo rapportandone delle altre, che da queste si derivano, e che sono necessarie ad apprendersi da coloro, che volessero occuparsi con successo della soluzione de' problemi così detti di sito, difficili a risolversi con l'antica analisi; ma molto più riluttanti a' metodi de' moderni, che spesso riescono infruttuosi (*).

(*) Chiunque si ha formata un'idea della diversa natura de' problemi geometrici, e che si sarà anche esercitato in risolverne, dovrà esser persuaso della difficoltà che s'incontra in trattare coll'analisi algebrica anche que' problemi di sito, de' quali facili ed eleganti soluzioni si possono ottenere, per mezzo dell'analisi degli antichi. Del resto per convalidare la mia asserzione, chi non sa quanto il Leibnitz abbia fatto per istabilire l'analisi de' siti, e quanta giusta ragione abbia avuta dopo ciò il perspicacissimo d'Alembert nel dolersi, che, a malgrado i tentativi di sì grand'uomo, nulla o pochissimo si era conseguito per l'oggetto cercato. E quantunque posteriormente il La Grange e molti altri insigni analisti moderni siansi validamente cooperati, per sottoporre, anche per questa parte, la Geometria all'Algebra; i Geometri però non potranno esser paghi interamente di queste loro fatiche, se i risultamenti a' quali conduce la modernissima Analisi di Sito, non sieno capaci di una facile ed elegante costruzione, come quelli che in simili casi offre la Geometria.

C A P. II.

DE' DETERMINANTI DEL SITO DE' PUNTI, DELLE LINEE RETTE,
E DEGLI ANGOLI NELLO SPAZIO.



22. Finora si è veduto in qual modo poteva esibirsi il sito di alcuni oggetti geometrici in un piano, conviene ora passare a determinare in qual modo si possa definire il loro sito nello spazio; e questo problema è più difficile del precedente, perchè lo spazio non potendosi rappresentare in rilievo, o almeno non conducendo di ciò fare a' bisogni delle arti, conviene ritrovar de' ripieghi, per avere in disegno sopra di un foglio di carta, o sopra di una stess'aja i determinanti del sito di quelli oggetti geometrici, che debbono esser dati nello spazio.

Questa nuova ricerca, che tratteremo nel presente Capitolo, ed in quello che segue; e che poi applicheremo negli altri, è stata ultimamente ridotta in sistema scientifico, ed ha formato un nuovo ramo di Geometria chiamato *Descrittiva* da' Signori *Monge*, e *Lacroix*.

23. *Def. v.* Per *proiezione* di un punto sopra un piano qui intendiamo l'incontro della perpendicolare abbassata da quel punto su questo piano, che dicesi *piano di proiezione*. E la grandezza di una tal perpendicolare dicesi *altezza* del punto sul piano; poichè in effetto essa misura la distanza di quello da questo.

24. *Cor.* Tutti i punti della perpendicolare ad un piano hanno sopra di questo la stessa proiezione.

25. *Def. vi.* Un piano, ch'è ad angolo con un

altro si dirà *abbattuto* con questo, se giri tanto intorno alla loro comune sezione, finche giunga a formare con l'altro un piano solo.

PROP. VIII. TEOR.

26. *Le proiezioni di tutt'i punti di una linea retta, sopra un piano, sono alligate in un'altra linea retta.*

Imperocchè tutte queste proiezioni vengono ad essere alligate nell'intersezione del piano di proiezione con quell'altro perpendicolare ad esso, che passa per la linea retta; e quindi in un'altra linea retta (4.El.XI).

27. *Cor. 1.* Tutte le linee rette tirate in un piano perpendicolare ad un altro, hanno, per loro comune proiezione su questo, l'intersezione di tali piani. E quel piano si suole ordinariamente chiamare *piano proiettante* delle linee rette, che in esso si tirano.

28. *Cor. 2.* E per determinare le proiezioni di una linea retta in un piano, basta determinare sopra questo le proiezioni di due punti di essa. Adunque.

29. *Def. v¹¹.* Quella linea retta che unisce sopra un piano le proiezioni di due punti esistenti nello spazio, è la proiezione su questo piano della linea retta, che passa per quelli.

30. *Cor.* Quindi se la linea retta proposta a proiettarsi sopra un piano è perpendicolare a questo; la sua proiezione sopra esso sarà quel punto ove l'incontra.

31. *Def. v¹¹¹.* Una linea retta si dirà *parallela ad un piano*, s'è parallela alla sua proiezione su questo.

32. *Cor. 1.* Adunque se per un punto, ch'è in un dato piano, si tiri la parallela ad una linea retta parallela al piano; tal linea retta tirata dovrà giacere in quel piano.

33. *Cor. 2.* Una linea retta terminata parallela ad un piano adegua la sua proiezione su questo.

34. *Scol.* È facile l'accorgersi, che il concetto della precedente definizione possa estendersi, e quindi aversi una linea retta per parallela ad un piano, s' essa è parallela a qualunque linea retta tirata in questo.

SCOLIO GENERALE.

35. Per le seguenti ricerche supporremo stabilito un piano nello spazio come termine di rapporto degli oggetti geometrici, che in questo si vogliono fissare, cioè de' quali si vuol determinare il sito. Una tal supposizione non è immaginaria, ma reale: poichè in natura si può sempre prendere per questo piano l'orizzonte di un dato luogo della terra. Quel tal piano suole perciò chiamarsi *orizzontale*; e dicesi *verticale* ogni altro piano perpendicolare ad esso, e del quale è dato il sito, com'è chiaro, se è data semplicemente la sua comune sezione col piano orizzontale. Parimente si dovrà avere come un piano fissato nello spazio, e che si potrà perciò anche prendere come termine di rapporto degli oggetti, che si vogliono in questo rappresentare, ogni altro piano di cui è data la comune sezione col primo, e l'angolo sotto cui s'inclina quello a questo.

Inoltre la proiezione di un punto, ch'è nello spazio, sul primo di tali piani, si dice *proiezione orizzontale*; e s'essa è sul piano verticale, si chiamerà *proiezione verticale*.

PROP. X. TEOR. .

36. *Se è data la proiezione di un punto, ch' è nello spazio, sopra un piano di sito, e l' altezza di esso su questo; sarà dato il sito di un tal punto.*

Imperocchè un tal punto non potrà essere, che quel solo, che vien rappresentato dall'estremo della perpendicolare innalzata sul piano di sito dalla proiezione data in esso, ed uguale all'altezza data; che perciò dovrà esser dato di sito (*def. 5.*).

PROP. X. TEOR.

37. *È dato il sito di un punto nello spazio, se ne sono date le proiezioni su due piani, che s'incontrano.*

Rappresenti A (*fig. 4.*) un punto, di cui sieno date le proiezioni a , a' su i piani LN, LP, che s'intersecano nella linea retta LM. È chiaro che se per le Aa, Aa', che sono le altezze rispettive di quel punto su que' piani di proiezione, s'intenda passare un piano, questo dovrà esser perpendicolare a' due LN, LP (*18. El. xi.*); e quindi le sue comuni sezioni A'a, A'a' con questi, dovendo essere anche perpendicolari alla LM (*19. El. xi.*), comprenderanno l'angolo d'inclinazione dell'un piano all'altro (*def. 4. El. xi.*). Adunque nel quadrilatero Aa A'a' vi saran dati tutti gli angoli, e di più i lati A'a, A'a' intorno ad un di questi: che perciò esso potrà geometricamente descriversi; ed in tal modo verrà ad esibirsi la Aa, o la Aa', cioè l'altezza del punto A sopra uno de' piani di proiezio-

ne. Laonde questo punto dovrà esser dato di sito (pr. 9.).

38. Cor. 1. Se mai i piani di proiezione LN , LP fossero ortogonali, in questo caso sarebbe retto l'angolo $aA'a'$; e quindi un rettangolo la figura $AaA'a'$; adunque sarà Aa uguale ad $a'A'$, ed $A'a'$ uguale ad aA' , cioè: *L'altezza del punto A sopra uno de' piani ortogonali di proiezione, è quanto la perpendicolare, che dalla proiezione di esso sull' altro di tali piani si abbassa sulla comune sezione loro.* Laonde in questo caso resta facilitata moltissimo l'esibizione del dato punto da' suoi determinanti espressi nel presente teorema.

39. Cor. 2. E quindi se i punti A , C sieno ugualmente alti sul piano di proiezione LN , anche le loro proiezioni a' , c' sull' altro di tali piani dovranno essere ugualmente alte sulla LM : che perciò la retta $a'c'$ che le unisce sarebbe parallela ad essa LM ; vale a dire, che: *Se una retta è parallela ad uno de' piani ortogonali di proiezione; la sua proiezione sull' altro di questi, è parallela alla comune sezione loro.*

40. Scol. 1. Volendosi trasportare la proiezione a'' (fig. 5.) di un punto A , da un piano NP obbliquo al piano LN , su cui, del punto stesso n'è data l'altra proiezione a , ad un piano LP perpendicolare a questo: bisognerà prima determinare la Aa , per mezzo della costruzione esposta nel teorema, ed indi tirare da a la aA' perpendicolare alla LM , ch'è la comune sezione de' piani LN , LP ; poi elevare sopra di essa LM , dal punto A' e nel piano LP , la perpendicolare $A'a'$ uguale alla Aa ; sarebbe a' la proiezione cercata.

41. Scol. 2. Che se la proiezione a'' del punto A vogliasi trasportare, dal piano NP obbliquo all' altro LN , sull' altro piano LP che s' inclini allo stesso LN

in un angolo dato Q : bisognerà anche determinar prima la Aa , poi abbassare da a sulla ML , ch'è l'intersezione di questo secondo piano di proiezione con lo stesso LN , la perpendicolare aA' ; ed indi presa in un lato dell'angolo Q la QR uguale a questa aA' , elevarli dal punto R la RS quanto la aA , e dal punto S abbassare sull'altro lato dell'angolo stesso la perpendicolare ST : si rileverà facilmente, che se dal punto A' si elevi sulla ML , e nel piano LP , la perpendicolare $A'a'$ uguale alla QT ; il punto a' sarà la proiezione del punto A su questo piano.

Ed ognuno potrà rilevare da quello che si è detto in questi due scolj, e nella def. 7., in qual modo si possa trasportare da un dato piano di proiezione sopra di un altro la proiezione di una linea retta.

42. *Cor.* Da' due Scolj precedenti si rileva anche, in qual modo, data la proiezione di un punto sopra un piano, e la sua altezza su questo, si possa determinare la proiezione di un tal punto sopra un altro piano posto ad angolo con quello.

PROP. XI. TEOR.

43. *È dato il sito di un punto nello spazio, se sono date le distanze, ch'esso serba da tre piani che s'incontrano scambievolmente sotto dati angoli.*

Imperocchè essendo date le distanze Aa , Aa'' (fig. 5.), che il punto proposto A serba da' due piani, LN , NP i quali s'inclinano in un angolo dato; nel quadrilatero $AaA''a''$, che si ottiene abbassando dalle proiezioni a , a'' del punto A su que' piani, le perpendicolari aA'' , $a''A''$ sulla loro comune sezione NM ; intendendo congiunte le Aa , Aa'' , vi saran dati tutti

gli angoli, ed i lati dintorno all'angolo A'' ; che perciò esso si potrà geometricamente descrivere, e quindi sarà data la aA'' . Similmente si dimostrerà, ch'essendo date le distanze Aa , Aa' , che lo stesso punto A serba da' due altri piani dati NL , LP , sia pur data la aA' . Adunque saranno date le distanze che il punto a serba dalle due linee rette ad angolo MN , ML ; e quindi sarà dato il sito di un tal punto nel piano LN (*pr.* 7.). Laonde del punto A , ch'è nello spazio, n'è data la proiezione a su di un piano LN di sito: è poi anche data l'altezza aA di esso su tal piano; perciò il suo sito sarà dato (*pr.* 9.).

44. *Cor.* Dalla determinazione del presente Teorema si rileva, che: *Se sono date le distanze che un punto nello spazio serba da due piani che s'inclinano in un angolo dato, saranno anche date le distanze che le proiezioni di que' punti su questi piani serbano dalla loro comune sezione.*

PROP. XII. TEOR.

45. *Se sono date, sopra di un piano, le proiezioni di due punti, e le loro altezze rispettive su tal piano, sarà dato il sito della linea retta che passa per essi.*

Imperocchè sono dati di sito due punti pe' quali essa passa, e per gli quali non ve ne passa che una sola, che perciò tal linea retta dovrà essere data di sito (*def.* 5.).

PROP. XIII. TEOR.

46. Una linea retta è data di sito nello spazio, se sono date le sue proiezioni su due piani che s'incontrano.

Poichè, si prendano in una delle proiezioni $a'b'$ (fig. 4.) di tal linea retta nel piano LP i punti a' , b' , da' quali si abbassino sulla LM le perpendicolari $a'A'$, $b'B'$; poi da' punti A' , B' si tirino alla stessa LM, nell'altro piano LN, le perpendicolari $A'a$, $B'b$ sino alla proiezione ab della linea retta stessa, in questo piano: i punti a , b rappresenteranno le proiezioni sul piano LN di que' punti della linea retta proposta, che avevano per loro rispettive proiezioni sull'altro piano di proiezione le a' , b' . Adunque essendo date di ciascuno di tali punti le rispettive proiezioni su due piani che s'incontrano, ne sarà dato il sito (pr. 10.); e quindi sarà data di sito la linea retta che passa per essi (pr. 12.).

SCOLIO GENERALE.

47. Si è veduto ne' num. 36, 37, 45, 46, che i determinanti di un punto nello spazio sono, o la sua proiezione sopra un piano di sito, e l'altezza sua sopra questo, o pur le proiezioni su due piani ad angolo. Similmente, che i determinanti di una linea retta nello spazio sono, o le proiezioni di due suoi punti sopra di un piano, e le loro altezze rispettive su questo, o pur le proiezioni di tal linea retta su due piani ad angolo.

Or i primi due di tali espedienti, cioè quelli de' num. 36 e 45, sono da proporsi ai secondi (37 e 46); poichè primieramente questi, e non già quelli danno una grandissima facilità nelle costruzioni; e poi se

fossero molti i punti dati, a diverse altezze sopra un piano, potrebbe facilmente col primo metodo (36, e 45) prodursi confusione, e scambiarsi l'altezza di un punto con quella di un altro, non esistendovi connessione alcuna, nè ordine tra le proiezioni di que' punti segnati nel piano di proiezione, e le loro altezze esibite a parte. Adunque i Geometri, e gli Artisti in pratica hanno sempre presi per determinanti del sito di un punto, o di una linea retta nello spazio le loro proiezioni su due piani ad angolo; che perciò, ogni qual volta in appresso si dirà esser dato nello spazio il sito di un punto, o di una linea retta, dovrà intendersi, che ne sian date le di loro proiezioni su due piani, che s'inclinano in un dato angolo. Siccome poi riesce più facile il ricavare da questi determinanti il sito di tali cose geometriche nello spazio, allorchè i piani di proiezione sono posti ad angolo retto, come si è già veduto di sopra (38), e che altronde tal supposizione non deroga alla generalità delle costruzioni, potendosi nella maggior parte de' casi prendere questi piani ad arbitrio; si suole perciò scegliere questa posizione per tali piani.

Affinchè però non mancasse in qualche caso il mezzo di fare altrimenti, abbiamo ne' numeri 37 e 46 esposta la maniera di determinare il sito di un punto nello spazio, per mezzo delle sue proiezioni generalmente, cioè supponendo che i piani di proiezione fossero obbliqui; ed abbiamo di più anche mostrato, in qual modo le proiezioni di un punto, e di una linea retta si possano da un piano obbliquo ad un altro trasportare sopra un piano perpendicolare a questo (40); ed in appresso non tralascieremo di dare i mezzi convenevoli onde eseguire su i piani di proiezione obbliqui quelle costruzioni di varj Problemi di Geometria di

sito che risolveremo, e che per le ragioni poc'anzi dette, ed anche per metodo eseguiremo sopra i piani ortogonali.

47. Di più, dovendosi per gli usi pratici rappresentare le due proiezioni in disegno sopra di uno stesso foglio di carta, o sopra di una medesima aja, si sono perciò determinati gli artisti a supporre, che il piano verticale fosse abbattuto. La proiezione verticale è dunque sempre disegnata sopra un piano, che fa una continuazione coll'orizzontale, e per farsi un'idea dell'oggetto disegnato, bisogna immaginare, che una convenevol rivoluzione in senso contrario a quella, che il piano verticale ha dovuta fare per abbattersi, lo rimetta nel suo primiero sito. Ciò posto, per distinguere bene il piano orizzontale dal verticale abbattuto con esso, si suole segnare con una linea più forte la comune sezione de' piani di proiezione nel disegno.

Così la proiezione verticale $a'b'$ di una linea retta AB (fig. 4.) esistente nello spazio, non si esegue realmente sul piano verticale $P'Q'LM$ nel suo vero sito; ma si bene sull'altro $PQLM$, che rappresenta quello abbattuto coll'orizzontale $LMNO$. Una tal disposizione, indipendentemente dalla ragione poc'anzi addotta, e dalla facilità di esecuzione che dà al disegno, ha ancora il vantaggio di abbreviare la determinazione delle proiezioni. Supponendo in fatti, che i punti a, a' sieno le rispettive proiezioni del punto A sopra i piani LN, LP , è chiaro, che le perpendicolari abbassate da esse sulla comune sezione LM de' piani di proiezione, le quali debbono concorrere in uno stesso punto A' di questa, continuando ad avere un tal sito per rapporto alla LM , anche quando il piano verticale si è abbattuto, verranno a formare una sola linea retta. Vale a dire, che: *Essendo data la proiezione di un punto in uno de' piani di proiezione, la sua proiezione sull'altro di questi abbattu-*

to col primo esisterà nella perpendicolare indefinita, che dalla proiezione data si abbassa sulla comune sezione de' piani di proiezione. E perciò se quest'altra proiezione dovesse anche esistere in una linea retta di sito tirata in quest'altro piano, essa sarebbe quel punto, ove una tal linea retta è incontrata da quella perpendicolare.

Tutto ciò che in questo numero si è detto per gli piani ortogonali di proiezione, si deve intendere anche quando essi sieno obbliqui.

49. Bisogna inoltre avvertire, per la facile intelligenza delle seguenti costruzioni, che a fine di rendere più concepibili in disegno le diverse parti di ognuna di esse, e talvolta anche per rendere più agevole la maniera di esprimerle, adopraremo le lettere majuscole A, B , ec. per indicare i punti esistenti nello spazio, e queste stesse segnate con una virgoletta a destra, che suol dirsi *apice*, come A', B' , ec. dinoteranno i punti allogati nella comune sezione de' piani di proiezione. Inoltre i punti esistenti nel piano orizzontale saranno dinotati colle lettere piccole a, b , ec.; e quelli che trovansi nel piano verticale, dalle stesse con un apice, nel seguente modo a', b' , ec.: ed ogni punto nello spazio, e le sue proiezioni, come anche quell'altro in cui la linea retta che unisce queste intersega la comune sezione de' piani di proiezione, quando l'uno si suppone abbattuto coll'altro, verranno sempre contrassegnati da una stessa lettera variata però nella guisa poc' anzi detta; in modo tale, che se quel punto era dinotato con A , le sue proiezioni saranno espresse da a, a' , e da A' l'intersezione della retta aa' con la LM . Finalmente ad oggetto di rendere meno complicate le figure, e più intelligibili le soluzioni, si è sempre supposto, che ciò che deve aver luogo in ciascun Problema succeda in un solo de' quattro angoli

de' piani di proiezione indefiniti; la quale supposizione nulla detrae alla generalità dell'esibizione del quesito, e non toglie i mezzi da fare diversamente, quando ciò non si avveri in pratica.

PROP. XIV. TEOR.

50. *Se sono date le proiezioni di un' linea retta su due piani che s'incontrano; saranno determinabili da questa i punti ov' essa gl'incontra.*

Cas. 1. Dinoti LM (fig. 6.) la comune sezione de' piani di proiezione, che suppongansi primieramente ortogonali, ed *ac* sia la proiezione orizzontale di una linea retta, ch'è nello spazio, la quale proiezione incontri la LM in B' , $a'b'$ ne sia la verticale. Dovrà una tal linea retta esistere nel piano verticale che passa per *ac* (27.); che perciò essa dovrà incontrare l'altro piano di proiezione nella perpendicolare $B'b'$ elevata dal punto B' sulla LM, nel piano verticale; poichè questa perpendicolare viene ad essere la comune sezione del piano verticale di proiezione col poc'anzi detto piano verticale in cui esiste la linea retta proposta (19. El. vi.). Ma questo punto d'incontro dee trovarsi anche nella $a'b'$; mentre quella linea retta, e questa sua proiezione esistono in un piano stesso. Adunque il punto cercato sarà l'intersezione b' della $B'b'$ colla $a'b'$. E similmente se dal punto C' ove la linea retta $a'b'$ incontra la LM si elevi a questa la perpendicolare $C'c$, nel piano orizzontale, il punto *c* ove siffatta perpendicolare intersega la *ac* sarà l'incontro della linea retta proposta col piano orizzontale.

Cas. 2. Sieno ora obbliqui i piani di proiezione LN, LP (fig. 7). E poichè il punto ove la linea retta proposta incontra uno di tali piani LP dee ritrovarsi non sola-

mente nella proiezione $a'b'$ di tal linea retta su questo piano; ma anche nella comune sezione del piano stesso coll'altro perpendicolare ad LN condotto per ab , nel quale la linea retta proposta esiste (27.); dovrà perciò quel punto d'incontro esser l'intersezione di questa comune sezione colla $a'b'$. Non dee dunque farsi altro, che mostrare come possa determinarsi tal comune sezione. A tal uopo si prenda nella LM un punto E' ad arbitrio, e da esso gli si elevino le due perpendicolari $E'e$, $E'e'$ ne' due piani LN , LP rispettivamente, e la prima di queste si produca fino alla ab , l'altra s'intenda prolungata fino ad incontrare in e' la comune sezione che si vuol determinare. Ed essendo il piano $e'E'e'$ perpendicolare alla LM (19. vi.), e quindi al piano LN (18. vi.) al quale è anche perpendicolare quell'altro che si è supposto passare per la ab ; dovrà la loro comune sezione $e'e$ esser anche perpendicolare allo stesso piano LN (19. xi.); che perciò l'angolo $e'eE'$ è retto. Laonde nel triangolo rettangolo $e'eE'$ essendo dato l'angolo $eE'e'$, ch'è l'inclinazione de' piani LN , LP , ed il lato $E'e$, si potrà esso geometricamente costruire, e quindi si esibirà la sua ipotenusa $E'e'$. Adunque si farà noto sul piano LP un punto e' della comune sezione cercata; ma questa deve poi passare anche per lo punto C' ove la ab incontra la LM ; che perciò essa sarà la $C'e'$; ed il punto f' ove interseghansi la $C'e'$ e la $a'b'$ sarà il punto d'incontro della linea retta proposta col piano LP . E similmente si determinerebbe l'incontro di essa coll'altro piano LN .

PROP. XV. TEOR.

51. *Se è data la grandezza di ciascuna delle proiezioni di una linea retta terminata di sito; sarà anche data la grandezza di una tal linea retta.*

Imperocchè sia la linea retta terminata AB (fig.4.), le cui proiezioni su' i piani LN , LP sieno ab , $a'b'$, saranno le Aa , Bb perpendicolari al piano LN (def.5.): se dunque tirisi per l' estremo A della AB , che ha minor altezza sul piano LN la AC parallela alla ab , sarà la AC uguale alla ab (33.); e perciò data. Ma è poi la BC quanto la differenza di altezza dei punti A , B sul piano LN , la qual differenza è data, subito che i punti A , B sono dati di sito (37.). Adunque sarà anche data la AB , ch'è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo i cui cateti sono le AC , CB .

52. *Scol. 1.* Se i piani di proiezione si supponessero ortogonali; per ottenere la differenza di altezza degli estremi A , B della linea retta proposta sopra uno di tali piani LN , basterebbe tirare per la proiezione a' del punto A sul piano LP' la $a'c'$ parallela alla LM ; sarebbe $c'b'$ la differenza cercata (39). Adunque in questo caso, se si prenda sulla $c'a'$ la $c'h'$ uguale alla ab , e giungasi la $b'h'$; sarà questa quanto la linea retta AB .

53. *Scol. 2.* Dalla semplice ispezione della figura si rileva, che BA stia ad AC , o ab , come il raggio al coseno dell'angolo d'inclinazione della BA al piano LN della proiezione ab , cioè, che: *Una linea retta nello spazio sta alla sua proiezione sopra un piano, come il raggio al coseno dell'angolo d'inclinazione di quella a questo:* che perciò si vede anche come data, la grandezza delle proiezioni di una linea retta di sito, si possa determinare l'angolo della sua inclinazione a ciascuno de' piani di proiezione.

PROP. XVI. TEOR.

55. *Se sono date di sito due linee rette, che s'intersecano nello spazio: sarà dato il sito del punto della loro intersezione.*

Imperocchè un tal punto dovendo ritrovarsi nel tempo stesso in ciascuna di tali linee rette, la sua proiezione su ciascun piano di proiezione dovrà essere allogata in ciascuna delle proiezioni di quelle linee rette sopra di questo; che perciò essa dovrà essere l'intersezione di tali proiezioni. Adunque di un tal punto essendo date le proiezioni sopra due piani che s'incontrano, ne sarà dato il sito (*pr. 10.*).

56. *Cor.* Laonde la linea retta che si tira dall'intersezione delle proiezioni, sopra di un piano, di due linee rette, che s'intersecano nello spazio, all'intersezione delle medesime linee rette sull'altro piano di proiezione abbattuto col primo, deve risultar perpendicolare alla comune sezione de' piani di proiezione (48).

57. *Scol.* Che se tal congiungente risulti perpendicolare alla comune sezione de' piani di proiezione, non sarà questo un criterio generale da arguirne, che le linee rette proposte nello spazio s'interseghino, come alcuni Geometri *descrittivi*, tra i quali il *La-Croix*, han detto; poichè ciò può avvenire senza che queste linee rette s'interseghino nello spazio, ogni qual volta una di tali rette esistesse in un piano perpendicolare a' due di proiezione, nel qual caso la congiungente si confonde colle proiezioni di questa linea retta. Noi daremo nel Cap. IV. un principio generale per conoscere quando, intersegendosi le proiezioni di due linee rette su due piani di proiezione, s'intersecano anche le linee rette nello spazio.

PROP. XVII. TEOR.

58. *Se sono dati di sito i lati di un angolo, esso sarà dato di grandezza, e di sito.*

Sieno ab , ac (fig. 8.) le proiezioni de' lati dell'angolo in uno de' piani di proiezione, $a'b'$, $a'c'$ le corrispondenti sull'altro di essi; saran dati i punti d , e ove tali lati incontrano uno di cotesti piani (p. 14.), e quindi la de (pr. 1). Di più saran date di grandezza le proiezioni $a'D'$, ad di un lato di quell'angolo, come anche quelle $a'E'$, ae dell'altro lato; e quindi la grandezza di questi (p. 15): ma era anche dato il lato de , che lo sottende; laonde tal angolo si potrà geometricamente esibire, e perciò sarà dato di grandezza.

Ed essendo dati di sito i suoi lati, e perciò il suo vertice (pr. 16.); il sito di esso dovrà esser dato ($de. 2$, e 3).

PROP. XVIII. TEOR.

59. *Se sono dati di sito i vertici degli angoli di una figura rettilinea, ch'è nello spazio; tal figura sarà data di sito, di grandezza e di specie.*

Imperocchè le linee rette che giungono le proiezioni date de' vertici degli angoli di quella figura su ciascun piano di proiezione, ognuna con quella che gli è prossima, sono le proiezioni de' lati corrispondenti di essa; che perciò questi saran dati di sito; e quindi di sito sarà data quella figura, che da essi è terminata (def. 3.). Inoltre sarà data la grandezza di que' lati (pr. 15.,) e sarà pur data quella degli angoli ch'essi comprendono (pr. 17.); che perciò si potrà geometricamente descrivere una figura rettilinea uguale, e simile alla proposta; e quindi questa sarà anche data di grandezza, e di specie.

C A P. III.

DE' DETERMINANTI DEL SITO DE' PIANI, DELLE LINEE CURVE
CH'ESISTONO IN ESSI, DEGLI ANGOLI SOLIDI, E DE' POLIE-
DRI NELLO SPAZIO.



60. *Def. 1x.* Si chiama *traccia* di un piano, ch'è nello spazio, la sua intersezione con un piano di proiezione: e se questi piani sieno uno orizzontale, e l'altro verticale, la traccia sul primo di essi prenderà il nome di *orizzontale*, e si dirà *verticale* quella sull'altro.

In generale il nome di *traccia* si dà pure all'intersezione di una qualunque superficie curva con uno de' piani di proiezione.

P R O P. XIX. T E O R.

61. *È dato il sito di un piano nello spazio, se sono date le sue tracce su due piani di sito posti ad angolo.*

Imperocchè se per una di quelle tracce date si concepisca passare un piano, e questo rivolgersi dintorno a tal linea retta; tra le infinite posizioni diverse, ch'esso prenderà nel spazio, dovrà anche passare per l'altra delle tracce date; ed in questo caso la sua posizione resterà determinata, essendo esso il solo che può passare per queste due linee rette (2. *El. xi.*).

62. *Cor.* Adunque ogni qualvolta si dirà in appresso, che un piano è dato di sito nello spazio, bisognerà intendere, che ne sien date le tracce su due piani di sito posti ad angolo.

PROP. XX. TEOR.

63. *Se è data una delle tracce di un piano, ed un punto per lo quale esso passa; tal piano sarà dato di sito.*

Dinoti $A'a$ (fig. 9.) la traccia data, e sieno d, d' le proiezioni del punto dato. Si prenda in $A'a$ un qualunque punto b , dal quale si abbassi sulla LM , comune sezione de' piani di proiezione, la perpendicolare bB' , sarà B' la proiezione del punto b sull'altro piano di proiezione, se questi suppongansi ortogonali: che perciò, congiunte le $db, d'B'$, saranno queste le proiezioni corrispondenti di quella linea retta, che dal punto dato nel piano proposto si tira al punto b preso nella sua traccia orizzontale $A'a$. Or una tal linea retta dovendo esistere in siffatto piano, dovrà incontrare l'altra traccia di esso sul piano di proiezione verticale; che perciò essendo determinato il punto c' ove quella linea retta incontra questo piano di proiezione (*pr. 14 cas. I.*), sarà anche determinata l'altra traccia $A'a'$ del piano proposto; e quindi esso sarà dato di sito (*pr. 19.*).

Che se i piani di proiezione non sieno ortogonali; allora abbassata da b (fig. 10.) la perpendicolare bB' sulla LM , si descriva sulla $B'b$ il triangolo rettangolo $B'Kb$, in cui l'angolo $bB'K$ rappresenti l'inclinazione de' piani di proiezione. Egli è chiaro, che se questi suppongansi nel loro vero sito, e che il triangolo $B'Kb$ si concepisca rivolgersi dintorno a $B'b$, finchè il suo piano divenga perpendicolare al piano di proiezione in cui esiste la $A'b$; in tal caso $B'K$ dovrà allogarsi nell'altro piano di proiezione perpendicolarmente alla LM , ed il punto K si troverà essere, in questa posizione, la proiezione del punto b sul piano della pro-

jezione d' . Adunque quando i piani di proiezione si suppongano abbattuti, si otterrà tal altra proiezione, prolungando la bB' in b' , finchè sia $B'b'$ uguale a $B'K$; il punto b' sarebbe questa proiezione: ed il resto della determinazione si otterrà nel modo stesso del caso precedente, applicandovi però per l'esibizione del punto c' il caso 2. della Prop. 14.

PROP. XXI. TEOR.

64. *È dato il sito di un piano, che passa per tre punti dati nello spazio.*

Sieno a, b, c (*fig. 11.*) le proiezioni de' punti dati sopra uno de' piani di proiezione, ed a', b', c' le corrispondenti sull'altro: si congiungano le ba, ac, cb ; $b'a', a'c', c'b'$, queste congiungenti saranno le proiezioni delle linee rette che uniscono i punti dati nello spazio, le quali esistendo nel piano che passa per tali punti, dovranno incontrare i piani di proiezione in ciascuna delle tracce di quello su questi. Ma gl'incontri di quelle linee rette co' piani di proiezione sono determinabili (*pr. 14.*). Adunque saranno anche determinabili le tracce del piano, che passa per esse; e quindi sarà dato il sito di un tal piano nello spazio (*pr. 19.*).

65. *Scol.* Per la determinazione di queste tracce non è necessario di esibire gl'incontri di tutte le tre linee rette conciascuno de' piani di proiezione, ma basta di esibire gl'incontri e, d di due di esse con uno di que' piani, per avere la traccia edE' su di questo; e quindi, determinando il solo incontro d' di una delle stesse linee rette coll' altro piano di proiezione, si avrà l'altra traccia $d'E'$, nel caso che la già determinata ed non sia trovata parallela alla LM : ed in questo caso si ot-

terrebbe la traccia che passa per d' , tirando anche per questo punto una parallela alla LM; giacchè se una delle tracce di un piano è parallela alla comune sezione de' piani di proiezione, anche l'altra deve esser parallela a tal comune sezione.

LEMMA

66. Tutti que' punti esistenti nel piano di due linee rette di sito poste ad angolo, da ciascun de' quali abbassando sopra di esse le perpendicolari, queste serbansi tra loro una stessa ragione data, debbono essere allongati in un'altra linea retta di sito, che passa per lo vertice di quell'angolo.

Sieno E, e due di tali punti (fig. 12. n. 1, e 2), e, se è possibile, la linea retta Ee, che gli unisce, non passi per lo vertice A dell'angolo compreso dalle linee rette di sito AB, AC sulle quali da que' punti si sono abbassate le perpendicolari ED, EF; ed, ef, e quindi interseghi una delle linee rette di sito AB nel punto G, e l'altra AC in H. E poichè sta $ED : EF :: M : N$, ed è pure $ed : ef :: M : N$; sarà $ED : EF :: ed : ef$, e permutando $ED : ed :: EF : ef$. Ma $ED : ed :: EG : Ge$, ed $EF : ef :: EH : He$. Adunque sarà $EG : Ge :: EH : He$; e Ee, dividendo si avrà $Ee : eG :: Ee : eH$, cioè eG uguale ad eH; il che essendo falso, ne segue la linea retta che che passa per gli punti E, e, come anche per tutti quegli altri, che hanno la stessa condizione, debba passare per lo punto A.

Ciò premesso, se AF si prenda di una data grandezza, sarà dato il sito del punto F; e quindi quello della FE, ch'è perpendicolare alla AC nel punto F. Adunque sarà anche dato il punto L, dove questa intersega la AB (pr. 3.); e perciò saran dati di gran-

dezza la linea retta FL (pr.1.), e l'angolo FLA (pr.6.).

Laonde nel triangolo LED rettangolo in D sarà data la ragione di LE ad ED , che supponasi espressa da $P : M$; ma è poi $ED, EF :: M : N$; quidi starà $LE : EF :: P : N$; e per conseguenza sarà dato il punto E nella linea retta di sito FL . Ma è pur dato di sito l'altro punto A : adunque la EA dovrà esser data di sito.

67. *Scol.* La semplice ispezione della figura fa rilevare, che i punti proposti colla condizione espressa nel precedente teorema locale possano essere allogati in due diverse linee rette di sito, una che divide l'angolo BAC , e l'altra che cade al di fuori di esso, dalla parte di quel lato sul quale, per la qualità della ragion data di $M : N$, deve cadere la perpendicolare minore: e ciò è necessario a notarsi per la completa determinazione del seguente Teorema.

PROP. XXII. TEOR.

68. *È dato il sito di un piano nello spazio, se è data una delle sue tracce, e l'angolo d'inclinazione di esso al piano di proiezione in cui esiste questa traccia.*

Sia $A'a$ (fig. 13.) la traccia data di un piano che s'inclina a quello di proiezione $aA'M$ in cui questa esiste, in un angolo dato P .

Cas. 1. Suppongansi primieramente ortogonali i piani di proiezione, e per un qualunque punto b della traccia data $A'a$, che supporremo esser l'orizzontale, s'intenda passare un piano perpendicolare ad essa; un tal piano sarà verticale: quindi intersegherà il piano orizzontale $aA'M$ nella perpendicolare bC' , che dal punto b si eleva alla $A'a$, il piano di proiezione verticale nella $C'c'$ perpendicolare alla LM ; e finalmente il piano proposto in una linea retta bc' , che comprenderà

colla bC' l'angolo d'inclinazione di questo piano all'orizzontale, cioè l'angolo P . Or queste due seconde linee rette cioè la $C'e'$, e la bc' debbono concorrere in uno stesso punto nella traccia verticale del piano proposto; che perciò esse formeranno colla bC' un triangolo rettangolo, in cui essendo dati l'angolo acuto $a'bc'$, ed il cateto adjacente bC' ; resterà determinato l'altro cateto $C'e'$, e quindi il punto e' . Adunque la traccia verticale $A'a'$ del piano proposto verrà ad essere geometricamente assegnata, e quindi sarà dato il sito di un tal piano nello spazio (*pr. 19.*).

Cas. 2. Che se i piani di proiezione s'inclinino in un angolo dato Q (*fig. 14.*), e sia $A'a$ la traccia data del piano proposto, ed $A'a'$ quella che dee corrispondergli sull'altro piano di proiezione. Da un punto C preso in questa s'intenda abbassata sul piano di proiezione sottoposto la perpendicolare Cc ; poi dal punto c si tirino sulle aA' , LM le perpendicolari cb , cC' , e finalmente si giungansi le Cb , CC' . Egli è chiaro, che queste tali linee rette sieno anche rispettivamente perpendicolari alla $A'a$ ed LM (*pr. 18.*, e *4. xi.*); e quindi che l'angolo Cbc sia quanto P , e l'altro $cC'C$ quanto Q (*def. 6. xi.*). Adunque nel triangolo rettangolo Ccb essendovi dato l'angolo acuto cbC , sarà esso dato di specie; e perciò dovrà esser data la ragione di $bc : cC$, che esprimasi per quella di $M : R$. Similmente nell'altro triangolo rettangolo CcC' essendo anche dati gli altri suoi angoli, sarà pur data la ragione di $Cc : cC'$, che si esprima per $R : N$. Adunque starà $bc : cC' :: M : N$; e perciò il punto c si apparerà ad una linea retta di sito, che dovrà passare per lo punto A' (*lem. prec.*).

Ciò posto, ecco la determinazione di questo caso del presente teorema. Si esibisca la locale $A'E$ (*fig. 15.*)

di tutti, que' punti da ciascun de' quali abbassandosi sulle linee rette di sito $A'a$, $A'L$ le perpendicolari, sieno queste nella ragione di $M:N$, che si è ritrovata (*lem. cit.*): poi da un qualsivoglia punto c di essa si tiri sulla LM la perpendicolare cC' , che sarà data, ed indi al punto c della cC' si costituisca l'angolo $C'cD'$ quanto quello d'inclinazione de' piani di proiezione, cioè quanto Q ; la $C'D'$ dinoterà, com'è chiaro, la cC della figura precedente, e la cD' esprimerà la $C'C$ nella stessa figura. Laonde se dal punto C' si elevi nell'altro piano di proiezione la $C'c'$ perpendicolare alla LM , ed uguale a cD' , congiunta la $A'c'$ sarà questa l'altra traccia del piano proposto: che perciò esso sarà dato di sito (*pr. 19.*).

PROP. XXIII. TEOR.

69. *Se è dato il sito di un piano nello spazio; sarà anche data la sua inclinazione a ciascuno de' piani di proiezione su i quali sono date le tracce di esso.*

Cas. 1. In primo luogo i piani di proiezione sieno ortogonali; e preso nella loro comune sezione LM (*fig. 13.*) un punto qualsivoglia C' , da questo gli si elevi nel piano della traccia $A'c'$ la perpendicolare $C'c'$, e si abbassi sull'altra traccia $A'a$ la perpendicolare $C'b$; congiunta la $c'b$, dovrà esser questa anche perpendicola alla $A'a$, e quindi l'angolo $c'bC'$ sarà l'inclinazione del piano proposto $A'a$ al piano di proiezione ov'è la sua traccia $A'a$, cioè l'angolo da determinarsi.

Or nel triangolo $bC'c'$ rettangolo in C' , vi son dati i cateti bC' , e $C'c'$; quindi esso si potrà costruire, e per conseguenza resterà esibito l'angolo $c'bC'$, che cercavasi. E similmente si determinerà l'inclinazione del piano proposto all'altro piano di proiezione.

Cas. 2. Che se i piani di proiezione s' inclinino in un angolo dato Q (*fig. 14*); allora si faccia lo stesso apparecchio del caso 2 della Proposizione precedente, sarà anche l'angolo $CC'c$ quanto Q , e l'altro Cbc dinoterà l'inclinazione del piano proposto a $A'a$ a quello di proiezione in cui esiste la traccia $A'a$, cioè l'angolo che dee determinarsi. Or poichè il punto C nella retta di sito $A'a$ può prendersi ad arbitrio, si potrà perciò prendere ad una data distanza dall'altro A' ; che perciò quel punto sarà dato di sito; e quindi sarà data di sito e di grandezza la perpendicolare CC' abbassata dal punto C sulla LM (*p.5*), e di sito il punto C' ov' essa incontra la LM (*p.3*). Laonde nel triangolo rettangolo $CC'c$, essendovi dato l'angolo in C' e l'ipotenusa CC' , si potrà esso costruire, e quindi si esibiranno i suoi cateti Cc , cC' : perciò sarà dato di sito il punto c , e quindi sarà data di grandezza la perpendicolare cb , che da esso si abbassa sulla retta di sito $A'a$. Laonde nel triangolo rettangolo Ccb , essendo dati di grandezza i cateti Cc , cb , esso si potrà costruire, e così resterà determinato l'angolo Cbc . Ciò posto, ecco la determinazione di questo caso del presente Teorema. Si prenda in $A'a$ (*fig. 16.*) un punto c' , dal quale si abbassi la perpendicolare $c'C'$ sulla LM ; indi sopra di questa perpendicolare si descriva il triangolo rettangolo $c'KC'$, in cui l'angolo $c'C'K$ sia quanto l'altro Q d' inclinazione de' piani di proiezione. Si prolunghi la $c'C'$ in c , finchè sia $C'c$ uguale a $C'K$, e dal punto c si abbassi sulla $A'a$ la perpendicolare cb . Finalmente dal punto b si tagli sulla $A'a$ la bd uguale alla $c'K$; congiunta la cd , l'angolo bed sarà quello nel quale inclinasi il piano dato al piano di proiezione in cui esiste la sua traccia $A'a$. E similmente si determinerebbe l'inclinazione del piano dato all'altro.

piano di proiezione in cui è l'altra sua traccia $A'a'$.

70. *Scol.* In una maniera analoga a quella de' due precedenti teoremi si potrebbe anche eseguire la determinazione del seguente.

TEOREMA

71. *È dato il sito di un piano nello spazio, se n' è data una delle tracce, e l'angolo che questa dee comprendere coll' altra.*

Imperocchè in tal caso, supponendo essere $A'a'$ (fig. 14.) la traccia data, ed $A'a$ quella da determinarsi, si potrà, collo stesso artificio praticato nel secondo caso del Teorema prec., pervenire a determinare il punto c . Ed allora se costruiscasi un triangolo rettangolo in cui l'ipotenusa sia quanto la CA' , ed uno degli angoli acuti rappresenti l'angolo dell'inclinazione delle tracce; il cateto adjacente a questo dovrà esprimere in grandezza la $A'b$; e perciò, se col centro A' e con questo cateto per raggio si descriva l'arco di cerchio aby , la tangente cb condotta a quest' arco dal punto c determinerà il punto b per dove dee passare l'altra traccia.

PROP. XXIV. TEOR.

72. *Se un piano è dato di sito, sarà anche dato di sito ogni punto ch' è in esso, di cui ne sia data una sola proiezione.*

Sieno $A'a$, $A'a'$ (fig. 16.) le tracce del piano dato di sito, e sul piano di proiezione in cui esiste la $A'a$ sia dato il punto c , il qual ne indichi la proiezione di un punto C del piano dato. E egli chiaro, che abbassandosi da c sulla $A'a$ la perpendicolare cb , e che poi intendendosi congiunto il punto C coll'altro b ; questa congiungente, la cb , e la Cc , ch' è l'altezza del

punto C sul piano di proiezione $aA'M$ comprenderanno un triangolo rettangolo, in cui è dato l'angolo Cbc , come quello, ch'è l'inclinazione del piano dato al piano di proiezione $aA'M$ (p. 23), ed è pur dato il cateto bc . Laonde esso triangolo potrà costruirsi, e quindi si determinerà la Cc . Che perciò essendone data del punto C la proiezione c , e la sua altezza su questo piano di proiezione, esso sarà dato di sito (p. 9.)

P R O P. XXV. T E O R.

73. *S'è dato il sito di due piani che s'intersecano; sarà anche data di sito e di grandezza la comune sezione loro.*

Sieno $A'a$, $A'a'$ (fig. 17) le tracce di un piano, e $B'b$, $B'b'$ quelle dell'altro; ed f , e' rappresentino i punti ove s'intersecano quelle che esistono in uno stesso piano di proiezione, e quindi que' punti ove questi piani sono incontrati dalla comune sezione de' piani dati. Ciò premesso, si determini la proiezione del punto f , che esiste in uno de' piani di proiezione, sull'altro di questi, ed una tal proiezione sia F' . E poichè l'estremo e' della comune sezione de' piani dati è egli stesso la sua proiezione sul piano di proiezione $aA'M$ in cui esiste, e che su di questo n'è F' la proiezione dell'altro estremo f di essa, il quale era nell'altro piano di proiezione; perciò sarà $e'F'$ la proiezione di quella comune sezione sul piano di proiezione $aA'M$; ed una tal proiezione sarà data non solamente nel sito, ma anche in grandezza (p. 1). Similmente si determinerà il sito e la grandezza della proiezione $E'f$ della comune sezione de' piani dati sull'altro piano di proiezione $MA'a$. Adunque una tale intersezione dovrà esser data di sito (p. 13), e di grandezza (p. 15).

P R O P. XXVI. T E O R.

74. *Se sono dati di sito due piani che s'intersecano, è anche dato l'angolo della loro scambievole inclinazione.*

Sieno $A'a$, $A'a'$ le tracce di uno de' piani dati, $B'b$, $B'b'$ quelle dell' altro (fig. 18); sarà data di sito, e di grandezza la loro comune sezione (p. 25), di cui ne sia fD' una delle proiezioni. Ciò posto, si prenda in fD' un qualunque punto h , cioè si prenda la fh di una data grandezza, e si tiri per h la ehg perpendicolare ad fD' fino alle tracce $A'a$, $B'b$ de' piani dati, che esistono in questo piano di proiezione: poi si concepisca passare per tal retta un piano perpendicolare alla comune sezione de' piani dati, cioè alla ff' , allorché i piani di proiezione si suppongono nel loro vero sito, e sia K il punto ove tal piano incontra quella comune sezione; e quindi eK , gK le intersezioni del piano stesso con ciascuno de' dati, le quali debbono esser perpendicolari all' intersezione di questi; che perciò l'angolo eKg ch' esse comprendono rappresenterà l' inclinazione scambievole de' piani dati, e sarà perciò quello, che deve determinarsi. Or supponendo che i piani di proiezione sieno nel loro vero sito, è chiaro che nel triangolo $ff'A'$ essendovi dati i tre suoi lati, vi debba esser pur dato l'angolo $A'ff'$, o sia efK : che perciò nel triangolo eKf rettangolo in K essendovi data l'ipotenusa ef , e l'angolo acuto efK , potrà esso costruirsi, e quindi determinarsi la eK . Similmente si dimostrerà che sia pur data la gK . Laonde nel triangolo eKg essendovi dati i tre suoi lati, si potrà esso geometricamente costruire, e quindi resterà determinato l'angolo eKg , che cercavasi.

P R O P. XXVII. T E O R.

75. *S'è dato il sito di un piano e quello di una retta, che lo incontra nello spazio; sarà dato il sito di quel punto ove questa lo incontra.*

Sieno aA' , $A'a'$ le tracce del piano dato (fig.19), e de , $d'e'$ le proiezioni della data retta, per la quale s'intenda passare un piano perpendicolare ad uno di quelli di proiezione $aA'L$. Un tal piano avrà per sua traccia su di questo la stessa de , e la sua traccia sull'altro piano di proiezione $a'A'L$ dovrà passare per lo punto g' dove è questo incontrato dalla retta data, il qual punto si determinerà per mezzo del primo, o del secondo caso della prop.14, secondo che i piani di proiezione si suppongano ad angolo retto, o pure obbliquo. Laonde quest'altra traccia sarà rappresentata dalla $g'F'$: che perciò essendo dati di sito i due piani $a'A'a'$, e $g'F'd$; dovrà esser data di sito la loro intersezione (p. 25), di cui una delle proiezioni cade nella medesima de , e l'altra sia la $E'f'$. Or il punto ove quella retta di sito incontra il piano dato dovendo esistere nella intersezione de' piani poc' anzi detti, la proiezione di esso sul piano della $d'g'$ dovrà cadere nella $f'E'$; ma deve anche trovarsi nella $d'g'$, ch'è la proiezione corrispondente della retta data. Adunque quella proiezione sarà il punto e' ove s'intersecano le $d'g'$, $f'E'$. E poichè l'altra proiezione di quel punto d'incontro deve esistere nella dF' , e nella perpendicolare indefinita, che da e' si abbassa sulla LM (n.48); perciò essa sarà il punto e . Laonde il punto d'incontro della retta data col piano dato sarà dato di sito (p.10.)

P R O P. XXVIII. T E O R.

76. *Se sono dati di sito un punto, ed un piano; sarà anche data di sito e di grandezza la perpendicolare, che da quel punto si abbassa su questo piano.*

Sieno $A'a$, $A'a'$ (fig. 19) le tracce del piano dato, e d , d' le proiezioni del dato punto. E poichè il piano, che proietta la perpendicolare al piano $aA'a'$ sul piano di proiezione $aA'L$ deve essere nel tempo stesso perpendicolare a ciascuno di questi (n. 27, e 18 *El. xi.*); perciò la comune sezione di tali piani, cioè la $A'a$ dovrà esser perpendicolare a quel primo piano proiettante (19. *El. xi.*), e quindi alla comune sezione di esso col piano $aA'L$ (d. 4. *El. xi.*), ch'è la proiezione su questo piano della perpendicolare proposta; che perciò dovendo questa proiezione passare per d sarà essa la perpendicolare db , che dal punto d si abbassa sulla $A'a$. E similmente si troverebbe, che la proiezione di tal perpendicolare sull'altro piano di proiezione, sia la perpendicolare $d'b'$ abbassata dal punto d' sulla $A'a'$. Quindi essendo date le proiezioni della proposta perpendicolare, essa sarà data di sito (p. 10). Laonde sarà anche dato il sito di quel punto ov'essa incontra il piano dato (p. 27), le proiezioni del quale sieno le e , e' : che perciò saranno date di grandezza le proiezioni de , $d'e'$ di tal perpendicolare definita tra il punto da cui parte, ed il piano sul quale si abbassa; e quindi sarà anche data la grandezza di essa perpendicolare (p. 15).

77. *Scol. Dalla determinazione della prima parte del presente Teorema si rileva, che: Se una retta è perpendicolare ad un piano, ciascuna proiezione di quella retta deve essere anche perpendicolare alla corrispondente traccia del piano.*

PROP. XXIX. TEOR.

78. *Se sono dati di sito una retta ed un punto ; sarà anche dato di sito quel piano , che passa per lo punto dato , ed è perpendicolare alla retta data.*

Sieno ab , $a'b'$ le proiezioni della data retta (fig:20), e d , d' quelle del punto dato , per lo quale s'intenda tirata nel piano proposto una retta parallela ad uno de' piani di proiezione ; una tal retta dovrà esser non solamente parallela alla sua proiezione su tal piano (d.8); ma anche alla traccia su di questo del piano proposto ; poichè altrimenti , incontrando essa una tal traccia incontrerebbe il corrispondente piano di proiezione , cui si è supposta parallela. Adunque siccome la traccia del piano proposto deve esser perpendicolare alla ba (sc. p. 28) , così la proiezione della retta proposta nel piano della ba , sarà anche perpendicolare alla ba : ma deve anche passare per lo punto d ; adunque una tal proiezione resterà determinata abbassando da d sulla ba la perpendicolare dc . Inoltre essendosi la retta tirata supposta parallela al piano di proiezione in cui è la ba , tutti i suoi punti debbono essere ugualmente alti su tal piano , e perciò l'altezza di ciascun di essi è data al pari di quella del punto dato ; che perciò per un qualunque di essi , che abbia per proiezione sul piano della ba il punto e , se ne potrà determinare l'altra proiezione e' sul piano della $b'a'$: quindi sarà anche data su tal piano la $d'e'$, ch'è l'altra proiezione della retta che si è supposta tirata (*). Laon-

(*) Se i piani di proiezione fossero ortogonali , la $d'e'$ si otterrebbe tirando per d' la parallela alla LM (29) .

de sarà determinato il punto h' dove tal retta incontra il piano della $a'b'$, per lo qual punto h' dovendovi passare la traccia corrispondente del piano proposto, questa si otterrà abbassando da h' la $h'b'$ perpendicolare alla $b'a'$ (*sc. p. 28*). Ed abbassandosi dal punto A' ove questa incontra la comune sezione LM de' piani di proiezione la perpendicolare $A'b'$ alla ab , si avrebbe l'altra traccia di quel piano; che perciò esso sarà dato di sito (*p. 19*).

79. *Cor.* Essendo dato di sito questo piano e la retta cui è perpendicolare, sarà anche dato di sito il punto ove questa incontra quello (*p. 27*). Adunque sarà data di sito, e di grandezza quella retta che si conduce dal punto dato a quel punto d'incontro (*p. 13, e p. 15*), e ch'è la perpendicolare; che da quel punto si tira alla retta data (*d. 3. El. xi*). Laonde: *Se sono dati di sito nello spazio una retta ed un punto, sarà data di sito, e di grandezza la perpendicolare, che da quel punto si abbassa sulla retta.*

P R O P. XXX. T E O R.

80. *Se sono dati di sito un piano ed una retta, sarà dato di grandezza quell'angolo nel quale questa s'inclina a quello.*

Imperocchè nella retta data s'intenda preso un punto, di cui ne rappresenti una delle proiezioni il punto d (*fig. 21*) preso ad arbitrio nella proiezione cb di tal retta, e l'altra sia per conseguenza il punto d' ove la perpendicolare dD' alla LM incontra l'altra proiezione $b'c'$ di essa retta: poi da un tal punto sul piano proposto s'intenda abbassata la perpendicolare, le cui proiezioni saranno le perpendicolari de , $d'e'$, che si abbassano dalle proiezioni corrispondenti del punto preso, sulle

tracce $A'a$, $A'a'$ del piano dato (sc. p. 28). Sarà dato l'angolo compreso da quell'inclinata e da questa perpendicolare (p. 17); e perciò anche il proposto, ch'è complemento di questo.

P R O P. XXXI. T E O R.

81. *È dato il sito e la figura di una linea curva ch' esiste in un piano dato nello spazio, se sono date le proiezioni di essa su due piani che s' incontrano.*

Sieno $acb, a'c'b'$ (fig. 22) le proiezioni date della curva ed $f'F'$, $F'f$ le tracce di quel piano in cui essa si suppone esisterè nello spazio, una delle quali $F'f$ si prenda per suo asse. Or se da un qualunque punto della curva s'intenda abbassata sull'asse $F'f$ l'ordinata corrispondente, è chiaro che il piano proiettante una tal ordinata sul piano di proiezione ove si trova la $F'f$ essendo perpendicolare a questo, debba la loro comune sezione, cioè la proiezione di quell'ordinata, esser perpendicolare alla $F'f$. Laonde una tal proiezione potrà rappresentarsi con una qualunque perpendicolare $c'h$, che da un punto c' preso nella $a'c'b'$ si abbassa sulla $F'f$; e proiettando i punti c' , h' in c ed h sull'altro piano di proiezione, la ch sarà la corrispondente proiezione di quell'ordinata: e da tali proiezioni determinata poi la sua vera grandezza (p. 15), questa si applichi dal punto h perpendicolarmente alla $F'f$ nel piano di proiezione ove esiste questa linea, e sia la $h'C$. Nel modo stesso si potrà determinare una qualunque altra ordinata $k'E$ prossima alla precedente, e così in seguito. Adunque se per gli punti C, E cc. si farà passare una linea, questa rappresenterà in figura ed in grandezza quella, ch'esisteva nello spazio; il cui sito sarà anche dato, poichè è dato quello di qualunque punto si prenda in essa.

82. *Scol.* Se la curva proposta fosse una curva definibile cioè di nota natura, e descrivibile con moto continuo, se ne saprebbe il sito, la forma, e la grandezza, determinando il sito di quel numero di punti, che sono necessarij per completamente descriverla. Così se si avessero le proiezioni di una curva circolare, basterebbe determinare tre punti nello spazio, che sono in essa; e bisognerebbe esibirne cinque, se tal curva fosse una parabola, un'ellisse, o un'iperbole; poichè per la Geometria Elementare, e per la Sublime si sa, descrivere un cerchio per tre punti dati, o una di quelle altre tre curve per cinque: e siccome per tali punti non può passarvi che una sola di queste curve, così ognuna di esse resterà pienamente determinata nella sua forma, grandezza, e sito. E si potrebbero anche tali cose più facilmente determinare, quando ne fosse dato il conoscere o il raggio di quel cerchio, e il centro di esso; o la grandezza, e il sito di due diametri di una di quelle altre curve.

P R O P. XXXII. T E O R.

83. *Se sono dati di sito nello spazio i lati di un angolo solido contenuto da tre angoli piani; un tal angolo sarà dato di sito e di grandezza.*

Poichè i lati di un tal angolo solido sono dati di sito, deve esser dato il sito del vertice di esso, ed il sito e la grandezza di ciascuno degli angoli piani che lo comprendono (p. 17). Adunque un tal angolo solido dovrà esser dato non solamente di sito (d. 3); ma anche di grandezza, poichè può esibirgliene uno uguale (23 *El.* xi.)

84. *Cor.* Adunque se fossero dati di sito nello spazio i lati di un angolo solido contenuto da un qual-

sivoglia numero di angoli piani; sarebbe anche dato il sito e la grandezza di esso: poichè si è dimostrato, che di sito e di grandezza sieno dati tutti quegli angoli solidi, ciascuno contenuto da tre angoli piani, da' quali quello è composto.

P R O P. XXXIII. T E O R.

85. *Se sono dati di sito i vertici degli angoli di un solido poliedro; un tal solido sarà dato di sito e di grandezza.*

Imperocchè essendo dati di sito i vertici degli angoli di un tal solido, saranno dati di sito i suoi lati (p. 13), le sue facce (p. 18), e gli angoli solidi che gli appartengono (c. p. 32). Adunque esso sarà dato di sito (d. 3). Inoltre saranno dati di grandezza que' lati (p. 15), di specie e di grandezza le sue facce (p. 18), e di grandezza i suoi angoli solidi (p. 32): e queste cose, come ben si rileva, sono più che sufficienti a poter fare geometricamente esibire un tal solido; che perciò esso sarà anche dato di grandezza.

C A P. IV.

APPLICAZIONE DELLE PRECEDENTI TEORIE ALLA SOLUZIONE
DI ALCUNI PROBLEMI.

PROP. XXXIV. PROBL.

86. *Dato nello spazio il sito di una retta, e quello di un punto; determinare il sito della parallela a tal retta condottale per quel punto.*

Poichè la retta data, e quella che vuol tirarsi debbono essere parallele tra loro; perciò i piani che le proiettano su di uno stesso piano di proiezione dovranno essere anche tra loro paralleli (6 e 15. El. xi); quindi anche parallele saranno le proiezioni di quelle rette su questo (16. El. xi). Ma ciascuna delle proiezioni della retta cercata deve passare per la corrispondente proiezione del punto dato. Adunque le proiezioni di tal retta si otterranno tirando in ognun de' piani di proiezione, per la proiezione del punto dato, la parallela alla corrispondente proiezione della retta data.

P R O P. XXXV. P R O B L.

87. *Dato nello spazio il sito di un piano, e quello di un punto; determinare il sito di quell' altro piano, che per questo punto si tira parallelo al piano dato.*

Dovendo il piano da tirarsi esser parallelo al dato, le loro comuni sezioni con ciascuno de' piani di proiezione dovranno essere anche parallele tra loro (16. El. xi). Non resta dunque altro a fare, che

determinare in ciascuno di que' piani di proiezione un punto per dove passa la traccia corrispondente del piano cercato.

Ciò posto sieno $A'a$, $A'a'$ (fig. 23) le tracce del piano dato, d, d' le proiezioni del dato punto D , ch'è nello spazio, ed $E'f$ dinoti una delle tracce del piano da tirarsi. Dalla proiezione d che ritrovasi nel piano stesso della $E'f$ si abbassi sulla $A'a$ la perpendicolare dh , che sarà anche perpendicolare alla $E'f$ nel punto f ove l'incontra. Or se dal punto dato D a questo punto f s'intenda condotta la Df , è egli chiaro che l'angolo Dfd dinoterà quello in cui inclinasi il piano cercato a quello di proiezione in cui esiste il punto d ; il qual angolo è dato del pari che il suo uguale in cui inclinasi il piano dato $a'A'a$ al medesimo piano di proiezione (p. 23). Che perciò nel triangolo Dfd essendovi dati gli angoli, ed il lato Dd (n. 37), vi si potrà geometricamente esibire il lato df . Quindi sarà dato di sito il punto f , e per conseguenza sarà data di sito la $f'E'$, che si tira per questo punto parallela alla aA' (p. 5 part. 2), e ch'è una delle tracce del piano cercato. Or l'altra di queste deve passare per lo punto E' ed esser parallela alla $A'a'$. Adunque anche questa sarà data di sito; e perciò resterà determinato nel sito il piano che si cerca (p. 19).

A L I T E R.

Pel punto dato D s'intenda tirata nel piano che si cerca una retta parallela ad uno de' piani di proiezione $aA'M$; una tal retta dovrà essere anche parallela alla traccia del piano in cui si tira, e quindi alla $A'a$: laonde la sua proiezione sul piano di questa traccia si otterrà conducendo per d la dF' parallela alla $A'a$. Or quella stessa retta dovendo avere tutti i suoi punti

ugualmente alti sul piano di proiezione $a'A'M$, l'altezza di ciascun di questi su tal piano pareggerà quella del punto D : che perciò per un qualunque di essi che abbia per proiezione sul piano della dF il punto e se ne potrà determinare l'altra proiezione sul piano della $MA'a'$ (n. 37); e quindi sarà data su tal piano la $d'e'$, ch'è l'altra proiezione della retta, che si è supposta tirata. Laonde resterà determinato il punto f ove tal retta incontra l'altro piano di proiezione $a'A'M$, per lo qual punto dovendovi passare la traccia corrispondente del piano cercato, si otterrà perciò questa conducendo per f la $f'E'$ parallela alla $A'a'$: e finalmente l'altra traccia di questo stesso piano sarà la parallela $E'f$, che per E' si conduce alla $A'a'$.

88. Scol. La seconda costruzione che si è data del precedente problema riesce oltremodo facile ed elegante nel caso de' piani di proiezione ortogonali; poichè in tal caso la proiezione $d'f'$ della retta che si suppone tirata nel piano che cercasi risulta parallela alla LM , ed elevando dal punto F' la $F'f'$ perpendicolare ad essa LM si avrà immantinente il punto f' per dove deve passare la traccia corrispondente del piano cercato (p. 14 cas. 1).

P R O P. XXXVI. P R O B L.

89. *Date di sito due rette, determinare il sito di quel piano condotto per una di esse, ch'è parallelo all'altra.*

Sieno ab , $a'b'$ (fig. 24) le proiezioni di quella retta data, per la quale si vuol condurre un piano parallelo all'altra, che ha per proiezioni le cd , $c'd'$.

Si determinino i punti a' , b dove quella retta incontra i piani di proiezione, dovranno per que-

sti punti passare le tracce corrispondenti del piano che cercasi; poichè una tal retta deve esistere in questo piano. Ciò posto il punto a' si progetti in A' sull'altro piano di proiezione, e poi per a' , A' si tirino le $a'E'$, $A'e$ parallele rispettivamente alle proiezioni $d'c'$, dc dell'altra retta data; saranno queste le proiezioni della parallela tirata nello spazio dal punto a' ad una tal retta data (n. 86), la qual parallela dovendo anche cadere nel piano cercato (n. 32), dovrà incontrare il piano di proiezione in cui esiste la cd in un punto della traccia corrispondente di quel piano. Che perciò se si determini il punto e ove tal parallela incontra questo piano di proiezione, e poi si congiunga la eb sarà questa una delle tracce del piano da determinarsi: e l'altra sarà per conseguenza la $a'F'$: ond'è che questo piano sarà dato di sito (p. 19).

90. *Scol.* Da questo problema si può trarre un mezzo generale, e più sicuro per determinare se intersegandosi le proiezioni corrispondenti di due rette ne' piani ove sono proiettate, tali rette s'interseghino o no, e quindi se sieno o no in un piano stesso. Poichè è chiaro, che se conducendosi per una di esse un piano parallelo all'altra; l'incontro di quest'altra con uno de' piani di proiezione cade nella traccia del piano tirato, allora tali rette esisteranno in un piano, che sarà precisamente quello che si è esibito; e s'intersegheranno: in caso contrario esse esisteranno in piani diversi, e non s'intersegheranno, quantunque s'interseghino rispettivamente le loro proiezioni.

P R O P. XXXVII. P R O B L.

91. *Ad un punto dato in una retta di sito, la quale si ritrovi in un piano dato, costituire un angolo piano, che sia uguale ad un dato.*

Sieno $A'a, A'a'$ (*fig. 25*) le tracce del piano dato, $cd, C'd'$ le proiezioni della data retta, e d, d' quelle del punto dato ch'è in essa: è chiaro che il punto c ove s'intersega la proiezione cd della retta colla corrispondente traccia $A'a$ del piano dato, sia quel punto ove questa retta incontra il sottoposto piano di proiezione; che perciò sarà data di grandezza la retta frapposta tra un tal punto d'incontro e 'l punto dato. Or da questo stesso punto s'intenda abbassata la perpendicolare sulla medesima traccia $A'a$, avrà questa per sua proiezione sul piano di tal traccia la perpendicolare de , che dal punto dato si abbassa sulla $A'a$, e 'l punto e sarà quello ov'essa incontra lo stesso piano di proiezione. Laonde il triangolo compreso da quell'inclinata da questa perpendicolare, e dalla ce sarà dato di specie e di grandezza; e quindi si potrà determinare l'angolo compreso dall'inclinata data, e dalla ce , o $A'a$. Ciò posto sia P l'angolo dato al quale vuol costituirsi l'uguale nel punto dato della retta data, e nel piano dato: si prenda su di un suo lato la PQ uguale a quell'inclinata data, ed al punto Q della PQ si costituisca l'angolo PQR uguale a quello compreso dalla stessa inclinata e dalla traccia $A'a$; il quale si è poc' anzi determinato; le rette PR, QR concorreranno in R , e determineranno così la QR , alla quale se si tagli sulla $A'a$ dal punto c l'uguale cf , e che poi il punto f si congiunga col dato nella data retta, si sarà costituito in esso punto di questa retta, e nel dato piano l'angolo dato P : il che chiaramente si rileva. E la proiezione dell'altro lato di un tal angolo sul piano $aA'M$ sarà la fl , e quella sull'altro piano di proiezione si otterrà, com'è noto, proiettando il punto f in F' su di questo, e congiugnendo la $F'd'$.

PROP. XXXVIII. PROBL.

92. *Data di sito una retta nello spazio; determinare quel piano che, passando per essa, s'inclina ad uno di quelli di proiezione in un dato angolo.*

Si determinino gl'incontri c, b' (fig. 26.) della retta data con ciascuno de' piani in cui esistono le sue proiezioni ed , $e'd'$; per ciascun di questi punti dovrà passare la corrispondente traccia del piano che si cerca. Ciò posto, il punto b' si progetti in b sull'altro piano di proiezione, e sulla $B'b'$ si prenda la $B'f'$ uguale all'altezza del punto b' su questo piano, cioè alla bb' (supponendo i piani di proiezione nel loro vero sito); poi al punto f' della $f'B'$ si costituisca l'angolo $B'f'G'$ uguale al complemento di quello in cui si dee inclinare il piano cercato al piano di proiezione ove si trova la ed : finalmente col centro b , intervallo $B'G'$ si descriva il cerchio hkl , al quale si tiri per c la tangente chA' , che sarà data di sito, e quindi anche di sito il punto A' ; sarà questa la traccia del piano cercato sul piano di proiezione della ed , e l'altra traccia sarà perciò la $A'b$.

Imperocchè (supposto che i piani di proiezione avessero il loro vero sito), è chiaro che il piano hbb' e l'altro della proiezione ed sieno perpendicolari tra loro; che perciò la ch essendo perpendicolare alla bh comune sezione di essi, lo dovrà esser pure alla hb' ; quindi l'angolo $b'hb$ è precisamente quello in cui inclinasi il piano $b'A'c$ al piano della proiezione ed (d. 6. El. XI.). Ma quest'angolo $b'hb$ apparisce dalla costruzione essere uguale all'altro $f'G'B'$. Adunque il piano $b'A'c$ è il cercato.

93. *Scol.* Se la retta data fosse stata una delle tracce del piano cercato, l'altra di queste si sarebbe

rivenuta con una costruzione analoga a quella di poc' anzi. Ed in tal modo si sarebbe ottenuta la determinazione del teorema, che: *È dato il sito di un piano, se è data una delle sue tracce, e l'angolo in cui esso inclinasi al piano dell'altra traccia.*

PROP. XXXIX. PROBL.

94. *Dato il sito di un piano, e quello di una retta, ch'è in esso; determinare quel piano che interseghando il proposto in questa retta, gli s'inclina in un dato angolo.*

Sieno $A'a$, $A'a'$ (fig. 18.) le tracce del piano dato, $B'b$, $B'b'$ quelle del piano cercato, ed fD' , fE' le proiezioni della retta data, che rappresenta la comune sezione di que' piani: i punti f , f' ove queste proiezioni incontrano le tracce $A'a$, $A'a'$ del piano dato, saranno ad un tempo que' punti ove la retta data incontra i piani di proiezione, e quelli per gli quali debbon passare le rispettive tracce del piano che cercasi. Ciò posto, per un punto qualunque h della $D'f'$ si elevi a questa la perpendicolare eh nel piano $MA'a$, e poi s'intenda condotto per una tal retta un piano perpendicolare alla retta data nello spazio, che la incontri in K : un tal piano intersegherà il piano dato e quello che cercasi nelle rette eK , Kg , le quali s'inclineranno l'una all'altra nell'angolo dato P . Inoltre si vedrà, come nella Prop. XXVI, che sia data la Ke , e la fK ; che perciò intendendosi congiunta la Kh , nel triangolo fKh rettangolo in K , essendovi data l'ipotenusa fh e'l cateto fK , sarà esso costruibile, e quindi si potrà determinare la Kh . Adunque se descrivasi un triangolo XYQ co' tre lati del triangolo eKh , e che poi al punto Y della XY , che corrisponde al punto K della eK si costituisca l'angolo XYT uguale a quello da-

to sotto cui inclinasi il piano dato al piano che vuol tirarsi, cioè a P ; è egli chiaro che la YT intersegando la XQ debba segnare la QT uguale alla h_g , cioè alla perpendicolare alla Df in h , prolungata sino alla traccia del piano che cercasi; che perciò questa sarà data al pari di quella; e quindi si avrà nel piano MA un altro punto, oltre f , per dove deve passare la traccia corrispondente del piano che vuol tirarsi. Laonde una tal traccia sarà la fgB' ; e quindi l'altra dovrà essere la $f'B'$.

PROP. XL. PROBL.

95. *Dato un angolo, e l'inclinazione de' suoi lati ad un piano; costruire la proiezione di quell'angolo su questo piano.*

Prendasi il punto A' (fig. 27) per la proiezione del vertice di quell'angolo su questo piano, ed $A'B'$ per quella di un suo lato. E poichè ne' dati di questo problema non s'include sito; ma sola grandezza di essi; perciò si potrà supporre, che il vertice dell'angolo proposto stia a qualunque altezza sul piano della proiezione A' . Si supponga perciò passare per la $A'B'$ un piano verticale, il quale si concepisca abbattuto, e nella perpendicolare $A'a'$ tirata in questo piano alla LM si prenda un qualunque punto a' , il quale dinoti il vertice di quell'angolo. Inoltre dal punto a' s'inclinino alla LM le rette $a'B'$, $a'C'$ sotto gli angoli ne' quali i lati del proposto angolo si suppongono inclinarsi al piano in cui vuol esso proiettarsi; potrà $a'B'$ dinotare effettivamente l'uno di tali lati; e l'altro è chiaro che dovrà essere dinotato nella sola lunghezza dalla $a'C'$; poichè è chiaro che tutte le rette, che dal punto a' s'inclinano al piano ove esiste la proiezione A' di quel punto, sotto uno stesso angolo, debbono esser lati de

cono retto che si genera dal triangolo $a'A'C'$ rivolgendosi intorno al cateto $a'A'$: che perciò se descrivasi il cerchio $C'ef$, quell'altro lato nel suo vero sito dovrà incontrare in un punto la circonferenza $C'ef$. Per determinare un tal punto, basterà costituire un triangolo co' lati $B'a'$, $C'a'$ che comprendano l'angolo dato che si vuol proiettare : egli è chiaro, che se col centro B' e coll'intervallo il terzo lato di tal triangolo, cioè quello che sottende quell'angolo dato, si descriva nel piano del primo cerchio l'altro geh ; il punto e ove s'intersegneranno le due circonferenze sarà il cercato : ed esse si dovranno intersegare, come lo mostrano i dati del problema. Laonde congiugnendo la $A'e$ si avrà l'angolo $eA'B'$, che sarà la dimandata proiezione dell'angolo dato.

95. *Scol. 1.* Al problema proposto si riduce immediatamente quest' altro : *Dati gli angoli che comprendono due rette fra loro, e colla perpendicolare che dal punto ove s' incontrano si abbassa su di un piano dato ; determinare su questo la proiezione di quel primo angolo* Poichè è chiaro che gli angoli che formano i lati dell'angolo dato colla perpendicolare, sono rispettivamente i complementi di quelli sotto cui essi s' inclinano a piano dato ; che perciò questi saranno anche dati : e la costruzione di questo Problema diventa la stessa di quella del precedente. Ed essa si sarebbe anche potuta effettuare senza tal riduzione, costituendo al punto a della $A'a'$ gli angoli $A'a'B'$, $A'a'C'$ uguali rispettivamente a quelli compresi da' lati del proposto angolo e dalla perpendicolare al piano dato, e continuando nel resto precisamente come nel precedente problema.

97. *Scol. II.* Il problema ultimamente enunciato nello Scolio precedente può avere un uso geometrico nel determinare l'inclinazione de' piani in cui esistono

due de' tre angoli piani dati comprendenti un angolo solido, non essendo altro una tale inclinazione, che la proiezione del terzo angolo su di un piano, cui si supponga perpendicolare il lato comune agli altri due. Ed esso o l'altro quasi identico della prop. è anche importante nelle pratiche geodetiche, per un'operazione, che spesso vi occorre, qual'è quella di ridurre un angolo all'orizzonte. Noi non entriamo in questo dettaglio di applicazione alieno dal nostro scopo, e che potrà facilmente rilevarsi da un qualunque libro di Geodesia.

P R O P. XLI. P R O B L.

98. *Costituire ad un punto dato in una retta di sito un angolo dato, con un'altra retta la quale s'inclini ad uno de' piani di proiezione in un angolo anche dato.*

Sieno $ab, a'b'$ (fig. 28) le proiezioni della retta data, e d, d' quelle del punto dato in essa, dal quale si vuol tirare un'altra retta, che comprenda con questa un dato angolo P , e s'inclini al piano di proiezione in cui esiste la ab sotto l'angolo Q .

Si applichi nell'angolo Q la RS perpendicolare ad un suo lato, ed uguale all'altezza del punto dato sul piano della ab ; e poi col centro d , e col raggio quanto il cateto RQ del suddetto triangolo si descriva il cerchio cef : è chiaro che ogni retta, che da quel punto si conduce ad un qualunque altro della circonferenza di questo cerchio s'inclini al piano di esso sotto l'angolo Q ; che perciò bisognerà determinare quella tra queste, che comprende colla data l'angolo P . A tal uopo si determini il punto h ove la tal retta data incontra il piano della ab (p. 14); sarà data di grandezza quella retta, che dal punto proposto si termina ad h (p. 15). Ma è pur data di grandezza la retta che si cerca, la quale è

quanto la QS , e l'angolo che questa e quella comprendono. Adunque sarà anche dato quel lato opposto a quest'angolo, cioè la distanza del punto h da quello ove la retta cercata incontra il piano della ab in un punto della circonferenza cfe . Laonde se col centro h , ed intervallo una tal distanza si descriva l'arco ef , i punti e, f soddisferanno al problema, cioè congiunte le ed, df ognuna di queste rappresenterà la proiezione della retta cercata sul piano della ab . E tal retta avrà per proiezione sull'altro piano di proiezione la $E'd'$, o la $F'd'$.

A L I T E R.

99. Si ritrovi il punto h ove la retta data incontra il piano della sua proiezione ab . Ed essendo dati i cateti hd , e l'altro che dinota l'altezza del punto dato su questo stesso piano di proiezione, resterà determinato l'angolo che la retta data comprende colla ab , o sia l'inclinazione sua al piano di questa. Laonde il proposto problema si sarà ridotto al precedente (n. 98).

P R O P. XLII. P R O B L.

100. *Esibire le proiezioni e la grandezza della minima distanza di due rette date di sito nello spacio, e che non sieno in un medesimo piano: cioè, determinare la perpendicolare comune ad esse.*

Una delle rette date abbia per proiezioni le $ab, a'b'$ (fig. 29), e quelle dell'altra sieno le $cd, c'd'$. Sieno inoltre $A'h$, $A'h'$ le tracce del piano condotto per la prima di esse parallelo all'altra (p. 36): è chiaro che tutte le perpendicolari ad un tal piano abbassate da punti di quella retta, che gli è parallela sieno tra loro uguali, e siccome tra queste vi deve esser quella, che incontra

l'altra retta data per cui si è fatto passare il piano, si rileva perciò che una di esse presa ad arbitrio possa rappresentare in grandezza quella minima distanza, che si cerca. Ciò posto si prenda in $c'd'$ un qualunque punto e' il quale si progetti in e nella cd ; saranno i punti e , e' le proiezioni di un punto preso ad arbitrio nella retta parallela al piano $h'A'h$, e le perpendicolari ef , $e'f'$ che da' punti e , e' si abbassano rispettivamente sulle $A'h$, $A'h'$ dinoteranno le proiezioni della perpendicolare, che dal punto di cui quelli sono le proiezioni si abbassa sul piano poc'anzi detto (n. 77): che perciò se si determinino le proiezioni g , g' del punto d'incontro di quella perpendicolare con questo piano, le eg , $e'g'$ rappresenteranno in grandezza le proiezioni della perpendicolare definita tra il punto preso nella retta, che ha per proiezioni le cd , $c'd'$ e il piano $h'A'h$ che gli è parallelo, su cui quella si è abbassata, cioè della minima distanza cercata: che perciò si farà nota la grandezza di questa (p. 15). Resta ora a sapersi solamente il sito di essa, cioè a determinarsi in una delle rette date il punto donde abbassata la perpendicolare sull'altra, questa riesca anche perpendicolare alla prima. A tal oggetto per gli punti g , g' si conducano le gk , $g'k'$ parallele rispettivamente alle cd , $c'd'$; queste gk , $g'k'$ dinoteranno, com'è chiaro, le proiezioni dell'intersezione di quel piano che passa per la retta che ha per proiezioni le cd , $c'd'$, ed è perpendicolare al piano $h'A'h$, con questo stesso piano, nella quale intersezione deve anche un tal piano $h'A'h$ essere incontrato da tutte le perpendicolari che si è detto. Laonde i punti k , k' ove le gk , $g'k'$ intersecano le proiezioni ab , $a'b'$ della retta ch' è in questo piano dinoteranno le proiezioni di quel punto di esso, e della retta che vi esiste, donde elevata al piano, e quindi ad una tal

retta la perpendicolare, questa incontra l'altra retta data, e gli è anche perpendicolare, cioè, saranno le proiezioni del punto di una delle rette proposte dal quale deve partire la perpendicolare ad esse comune: che perciò le proiezioni di questa perpendicolare nel suo vero sito saranno le perpendicolari kl , $k'l'$ alle $A'h$, $A'h'$ rispettivamente; e le proiezioni dell'altro punto ov' essa incontra l'altra retta data, saranno determinate dall'intersezione delle kl , $k'l'$ con le cd , $c'd'$ rispettivamente, cioè i punti q , q' .

C A P. V.

DE' DETERMINANTI DEL SITO DELLE SUPERFICIE CURVE
NELLO SPAZIO.

101. Le superficie curve di cui ci occuperemo nel presente capitolo sono le *cilindriche*, le *coniche*, e quelle di *rivoluzione*; poichè queste principalmente si considerano in natura e nelle arti di costruzione. Riverremo poi su questo argomento per considerarne anche un'altra famiglia di cui talvolta occorre far uso. Bisogna però premettere le definizioni di esse in tutta quella generalità, che si conviene al presente trattato.

102. *Def. ix.* Una linea curva la diremo data in un piano, se la troveremo descritta in questo, quantunque non se ne conosca la natura, e che non sia nè geometricamente, nè meccanicamente descrivibile.

103. *Cor.* Adunque una tal curva potrà anche aver le sue parti, continue, o discontinue che sieno, della stessa, o pur di diversa natura.

104. *Scol.* Dalla presente definizione si rileva, che ad una tal curva non si possa sempre condurre la tangente per mezzo di un artificio geometrico; che perciò nella maggior parte de' casi converrà assegnarla a occhio, come suol praticarsi nel disegno.

105. *Def. x.* Se in un piano vi sia data una qualunque linea curva, e fuori di esso un punto di sito: e che una retta la quale passi per questo punto si agghi sempre radendo quella curva; la superficie, che da essa verrà a generarsi si dirà *superficie conica*.

Quel punto fisso ne sarà il vertice; e la retta ge-

neratrice di essa, in qualunque luogo si ritrovi nel descriverla, si chiamerà *lato*.

O pure la superficie conica è quella che vien rappresentata dalle infinite rette, che da quel punto di sito si conducono agl' infiniti punti di quella linea curva, ch'è nel sottoposto piano.

106. *Scol.* Una tal superficie è necessariamente indefinita dalle due parti, come indefinita da queste parti stesse è la retta che la descrive; e potrà anche essere indefinita per uno, o due altri versi, secondochè indefinita per uno, o due versi sia la linea curva, che dirige il moto della retta rotante. Finalmente una tal superficie potrà esser composta di parti anche discontinue, e che non abbiano di comune, che il solo vertice, se mai discontinua, cioè a rami separati, sia quella tal curva direttrice.

107. *Def. xi.* Se in un piano vi sia data una qualunque linea curva, e sia di più dato il sito di una retta, che s'inclini ad esso; si chiamerà *superficie cilindrica* quella ch'è generata da un'altra retta, che va le continuamente la linea curva, ed è sempre parallela alla retta proposta: e tal retta generatrice in qualunque luogo si ritrovi nel descriver la superficie cilindrica, ne sarà un *lato*.

O pure la superficie cilindrica è quella, che viene rappresentata dalle infinite rette, che dagl' infiniti punti di quella curva si tirano parallele alla retta data di sito.

108. *Scol.* A questa definizione si potrà adattare, leggiermente modificandolo, lo stesso Scolio della definizione precedente.

109. *Def. xii.* Se in un piano vi sia segnata una curva di cui tutt' i punti abbiano un dato sito per rapporto ad una retta ch'è nel piano stesso; e supponendosi

immobile questa retta, quel piano si aggiri intorno ad essa: la superficie curva che in tal rivoluzione si verrà a generare dalla linea curva proposta, si dirà di *rivoluzione*; e quella retta fissa sarà il suo *asse*.

110. *Scol.* È chiaro che in questo moto ogni punto della linea curva generatrice descriverà un cerchio, il cui centro sarà quel punto ove l'asse è incontrato dalla perpendicolare tirata ad esso dal punto ch'è nella linea curva, ed il raggio è questa stessa perpendicolare. Ed una tal condizione dovrà riputarsi come essenziale alle superficie di rivoluzione.

Inoltre una tal superficie curva sarà indefinita per tutti que' versi, per gli quali erano indefiniti i rami della linea curva dalla quale è generata; e quella sarà inoltre continua, o discontinua, secondochè continue, o pur discontinue sono le parti di questa.

SCOLIO GENERALE.

111. Dalla genesi delle superficie cilindriche e coniche assegnata nelle loro definizioni sarà facile il dedurne, che segandosi una superficie conica con piani paralleli tra loro, le linee d'intersezione risultino simili e similmente poste; e che queste lo saranno affatto identiche nella superficie cilindrica. Ed una tal qualità potrà servire talvolta per criterio da discernere se una superficie curva si appartenga ad una di queste due specie.

Finalmente da tutte le definizioni precedenti si rileva chiaramente, che l'Analisi Algebrica non possa avere una completa applicazione alla teoria delle superficie curve; e che un tal metodo anzichè generalizzarne i risultati, non farebbe che restringerli, e quindi limitarne l'applicazione nella pratica delle Arti: poichè

L'Algebra non può prendere a considerare, che solamente quelle cose di Geometria, che hanno un'indole certa, e delle condizioni costanti, il che come si è veduto non si verifica affatto nelle considerazioni di cui ci stiamo occupando; e ciò senza tener conto delle grandi difficoltà ch'essa presenta nell'applicarsi alle teorie di sito. Che perciò mal si avvisano coloro, che imprendono a trattar le presenti quistioni con questo metodo, quasi recandosi a scorno di far servire la Geometria a se stessa. Essi non solamente pervengono così a risultati inconstruibili; ma particolarizzano inoltre le teorie generali che sulla genesi delle superficie curve la sola Geometria può comodamente stabilire.

PROP. XLIII. T E O R.

112. *I determinanti del sito di una superficie cilindrica nello spazio sono la posizione di quella linea retta cui è parallela la sua generatrice, ed il sito della sua traccia su di uno de' piani di proiezione.*

Sieno $ab, a'b'$ (fig. 30) le proiezioni di quella retta cui è parallelo ogni lato della superficie cilindrica, e pdq rappresenti la sua traccia sopra uno de' piani di proiezione. Si prenda in questa curva pdq un qualsivoglia punto d , che si progetti in D' sull'altro piano di proiezione; e per gli punti d, D' si tirino le $de, D'e'$ parallele rispettivamente alle $ab, a'b'$: dinoteranno esse le proiezioni di un lato della superficie cilindrica proposta, il quale incontra la curva pdq nel punto d , e che sarà dato di sito (n. 46). E similmente dimostrandosi, che sia dato il sito di ogn'altro lato di una tal superficie, essa verrà ad essere anche data di sito (d. 3).

PROP. XLIV. TEOR.

113. *I determinanti del sito di una superficie conica nello spazio sono il sito del suo vertice, e quello della sua traccia su di uno de' piani di proiezione.*

Sieno a, a' (fig. 31) le proiezioni del vertice di una superficie conica, e pdq la sua traccia sopra uno de' piani di proiezione. Si tiri per a , la retta acd che seghi la traccia pdq nel punto d , il quale si progetti in D' sull'altro piano di proiezione, e si unisca la $D'a'$; è chiaro che le $Da, D'a'$ saranno le rispettive proiezioni di quel lato della superficie conica proposta che passa per lo punto d della sua traccia. Adunque il sito di questo lato sarà dato; e così pure dimostrandosi dato il sito di tutti gli altri infiniti lati di quella superficie, essa sarà anche data di sito.

114. *Scol.* Per facilità maggiore nelle costruzioni si è preso ne' due precedenti teoremi per uno de' determinati di una superficie cilindrica o conica la sua traccia su di uno de' piani di proiezione: ciò però non deroga alla generalità de' determinanti del sito di esse. Imperocchè se questi nella superficie conica, per esempio, fossero stati il sito del vertice suo, e quello di una qualunque direttrice presa in un piano di sito, e data per le sue proiezioni $ab', a'b'$ (fig. 32): facilmente si rileva, che preso nella ab un punto c , e proiettato in c' nella $a'b'$, le congiungenti $cd, c'd'$ sieno le corrispondenti proiezioni di quel lato di essa superficie che passa per quel suo punto, che ha per proiezioni le c, c' . Ond'è che come poc'anzi ne sarebbe dato il sito. Ma chi non vede che in tal caso, determinandosi l'incontro e di esso lato col piano della acb , e così mano mano l'incontro di tutti gli altri

suoi lati col piano della stessa ab , si verrebbe a definire la traccia di quella superficie conica col piano della acb . Laonde questi nuovi determinanti si ridurrebbero a quelli esposti di sopra nel Teorema precedente. E lo stesso potrà dirsi per le superficie cilindriche.

PROP. XLV. TEOR.

115. *I determinanti del sito di una superficie di rivoluzione nello spazio, sono la posizione del suo asse, e quella della curva che la genera.*

Imperocchè è chiaro, che con questi determinanti non possa generarsi, che la sola superficie curva proposta, della quale se ne potrà anche conoscere il corso e la natura, se tali cose sieno anche date per la curva, che la genera. Inoltre essendo acb , $a'c'b'$ (fig. 22) le proiezioni della sua curva generatrice, ed LM , Ff le proiezioni dell'asse suo e di questa; si potrà per ogni punto qualunque di tal curva, di cui ne sien date le proiezioni c, c' , determinare la corrispondente ordinata in sito ed in grandezza (p. 31); che perciò sarà anche dato di sito e di grandezza quel cerchio, che da tal retta si descrive nel generarsi la superficie curva proposta. E lo stesso verificandosi per tutti i cerchi, che si possono in essa segnare segandola con piani perpendicolari al suo asse, ne segue che tal superficie curva debba esser data di sito.

CAP. VI.

DELLA MANIERA DI COSTRUIRE UNA SUPERFICIE
CURVA DATA DI SITO.

116. *Def. xiii.* *Costruire una superficie curva data di sito* si dice allorchè di ciascun suo punto di cui n'è data una sola proiezione, se ne cerca l'altra, cioè il sito.

117. *Scol.* La presente ricerca ha dunque per oggetto la determinazione di tutt' i casi del seguente Teorema: *S' è data di sito una superficie curva, sarà dato il sito d' ogni punto di essa, del quale ne sia data una sola proiezione, la cui verità è chiara; poichè si vede, che un tal punto non possa essere, se non uno di quelli ne' quali tal superficie curva è incontrata dalla perpendicolare elevata sul piano di proiezione dalla proiezione data del punto; e noi per ora esibiremo tal determinazione per le superficie, che abbiamo definite nel precedente Cap., ne' seguenti Problemi.*

PROP. XLVI. PROBL.

118. *Costruire una superficie cilindrica data di sito.*

La curva (*fig. 3o*) *pdq*, sia la traccia orizzontale di tal superficie, e le *ab*, *a'b'* dinotino le proiezioni di quella retta alla quale è costantemente parallela la generatrice di essa: sia inoltre *c* la proiezione data di un punto preso nella superficie proposta, e del quale se ne cerca l'altra proiezione; ed una tal pro-

jezione c esista primieramente nel piano della traccia pdq . Si tiri per c la retta ecd parallela alla ab ; una tal parallela sarà la proiezione di quel lato, o di que' lati della superficie cilindrica, se mai ve ne sieno più, come può addivenire, in ciascun de' quali è allogato il punto che ha per proiezione c , e ciascun di questi lati dovrà incontrare la traccia pdq , in quel punto corrispondente dove questa è intersegata dalla ecd . Adunque un di essi l'incontri in d . Si progetti questo punto d in D' , e si tiri la $D'e'$ parallela alla $a'b'$: quest'altra parallela sarà la proiezione corrispondente di quel lato della superficie cilindrica proposta, che incontrava la traccia pdq in d , e nel quale deve contenersi il punto cercato; che perciò se si abbassi da c sulla LM la perpendicolare $cC'e'$, il punto c' ove questa intersega la $D'e'$ sarà l'altra proiezione del punto proposto, che ritrovavasi nel lato poc' anzi costruito.

Che se la proiezione data c' non esista nel piano di proiezione in cui trovasi la traccia pdq ; ma si bene nell'altro: in tal caso si prenda ad arbitrio nella curva pdq un qualunque punto g , il quale si progetti sull'altro piano di proiezione, e poi per tal altra proiezione si tiri la $h'f'$ parallela alla $a'b'$, ed una tal parallela incontri la LM in G' , il qual punto si confonderebbe colla proiezione poc' anzi detta del punto g , se i piani di proiezione si supponessero ortogonali, come la figura gli rappresenta. Ciò posto si congiunga la gG' , e poi per lo punto c' si conduca la $c'e'D'$ parallela alla $a'b'$, e quindi alla $h'f'$, e tirata per D' la $D'd$ parallela alla $G'g$, si conduca finalmente per d la dce parallela alla ab ; saranno $D'e'$, de le proiezioni di quel lato della superficie cilindrica proposta, che incontra la traccia in d , e nel quale deve trovarsi allogato quel punto di cui c' n'è una proiezione. Laonde

l'altra di queste dovrà essere il punto c ove intersegansi la de , e la perpendicolare indefinita $c'C'$ abbassata sulla LM .

P R O P. XLVII. P R O B L.

119. *Construire una superficie conica data di sito.*

La soluzione di questo problema è identica a quella del precedente; e solamente bisogna avvertire, che ciascuna proiezione di un qualunque lato di quest'altra superficie si ottiene congiungendo la proiezione corrispondente di un punto ch'è in esso con quella del vertice, ch'è nello stesso piano di proiezione. Lo che vedesi eseguito nella fig. 31.

P R O P. XLVIII. P R O B L.

120. *Construire una superficie di rivoluzione data di sito intorno ad un asse perpendicolare ad uno de' piani di proiezione.*

Sia a (fig. 33.) la proiezione dell'asse di una tal superficie su quel piano cui esso è perpendicolare, ed $a'A'$ rappresenti la proiezione dell'asse stesso sull'altro piano di proiezione, che potrà prendersi, senza che ne resti resa particolare la presente costruzione, perpendicolare al primo. E poichè è dato il sito e la forma della proposta superficie curva di rivoluzione, dovrà esser dato il sito e la forma della sua curva generatrice in un piano di sito (p. 45), che suppongasi essere quello, che passando per l'asse, della proposta superficie curva, è parallelo al piano di proiezione verticale, ed una tal curva sarà perciò identicamente rappresentata in proiezione su quest'altro piano dalla $p'd'q'$. Ciò premesso si supponga primieramente, che la proiezione data c di quel punto, ch'esi-

ste nella proposta superficie di rivoluzione, si ritrovi nel piano di proiezione stesso ov'è il punto a , cioè sul piano orizzontale, e che si cerchi l'altra proiezione di esso sul piano verticale. Si unisca la ac , e col centro a intervallo ac si descriva il cerchio cde , che interseghi in d la retta ad parallela alla LM : egli è chiaro che le verticali elevate da' punti c, d debbano incontrare la superficie di rivoluzione proposta rispettivamente in punti ugualmente alti sul piano di proiezione orizzontale; che perciò sarà lo stesso il cercare l'altezza di ciascun punto d'incontro della verticale che parte da c colla superficie data, che quella di quegli altrettanti punti ne' quali la superficie stessa è incontrata dalla verticale che parte da d . Or per adempiere a questo secondo oggetto, si abbassi da d sulla LM la perpendicolare dD' , sarà $D'd$ la proiezione verticale della poc'anzi detta perpendicolare condotta per d ; che perciò la proiezione corrispondente di ciascuno di que' punti d'incontro dovrà cadere nella $D'd$; ma tal proiezione deve trovarsi anche nella curva $p'd'q'$; perchè tutti i punti della generatrice della superficie proposta esistente nel piano verticale condotto per ad debbono esser proiettati nella curva $p'd'q'$, come si rileva dalle cose poc'anzi dette. Laonde il punto d' ove la $D'd$ intersega la curva $p'd'q'$ sarà la proiezione di quel punto ove la proposta superficie di rivoluzione è incontrata dalla verticale condotta da d , e perciò $D'd$ rappresenterà l'altezza di questo sul piano orizzontale. Ma la stessa altezza orizzontale aveva anche, come si è detto, l'altro punto della stessa superficie ch'era proiettato in c su di questo piano di proiezione. Adunque l'altra proiezione di quest'ultimo punto, cioè la verticale, verrà dinotata dall'intersezione c' della perpendicolare indefinita cC' abbassata da

c sulla LM, e della parallela $d'f'$ alla LM condottale per d' .

Che se al contrario fosse data la proiezione verticale c' di un punto esistente in una superficie di rivoluzione data, e si cercasse l'altra proiezione di esso sul piano orizzontale cui è perpendicolare l'asse di questa: si otterrebbe l'intento tirando per c' l'ordinata $d'e'f'$ alla curva $p'd'q'$, che rappresenta la proiezione verticale della generatrice della proposta superficie, allorchè nel generarla si trova in sito parallelo al piano verticale; indi descrivendo col centro a e col raggio uguale a $d'f'$ il cerchio cde , ed abbassando da c' sulla LM la perpendicolare $c'C'ce$: tal altra proiezione cercata sarebbe uno di que' due punti c, c ove tal perpendicolare intersega la circonferenza di quel cerchio.

121. *Cor.* Dalla costruzione del precedente Problema si rileva anche in qual modo data una sola proiezione di un punto esistente in una data superficie di rivoluzione intorno ad un asse verticale, si possa determinare il cerchio che si descriverebbe da un tal punto nel rivolgersi che farebbe la curva generatrice intorno all'asse.

C A P. VII.

DE' PIANI TANGENTI LE SUPERFICIE CILINDRICHE
E CONICHE.

122. Questo Capitolo ed i due seguenti non formano che una sola dottrina, che si è distinta in varj Capitoli, per poterla esporre con più metodo. Tratteremo intanto in questo de' piani tangenti le superficie cilindriche e coniche, nel seguente de' piani tangenti le superficie di rivoluzione, e nell'altro poi de' contatti sferici.

123. *Def. xix.* Un piano si dice toccare una superficie curva, allorchè tutt'i piani che nel luogo del contatto segano comunque il piano e la superficie curva, producono in quello delle linee rette tangenti rispettivamente le curve ch'essi segnano in questa.

124. *Cor.* Siccome bastano due sole rette ad angolo per fissare la posizione di un piano, si vede perciò che per determinare un piano tangente ad una superficie curva basta fissare le tangenti in un punto del contatto a due sole linee, che da due piani diversi vengono segnate in quella superficie da essi segata.

125. *Scol.* E da ciò si rileva, che se queste tangenti a quelle linee curve nel luogo del contatto riescono poi seganti ad esse nella continuazione del loro corso, anche il piano che sarà tangente la superficie curva in quel tal luogo, la segnerà altrove.

126. *Def. xv.* Una superficie curva si dirà tangente ad un'altra, se quel piano tangente l'una nel luogo ov'esse s'incontrano sia tangente anche all'altra.

127. *Cor.* Ed è anche chiaro, che due superficie curve, le quali si toccano in un luogo, possano poi segarsi altrove.

128. *Def. xvi.* Per *normale* ad una superficie curva s'intende la perpendicolare al piano tangente nel luogo del contatto.

129. *Cor.* Che perciò il problema di *tirare la normale ad una superficie curva in un punto dato in essa* resterà risoluto per mezzo del n. 77, allorchè si sarà risoluto l'altro di *tirarle per un tal punto un piano tangente*; del che ci occuperemo qui appresso.

130. *Scol.* Siccome la tangente di una linea curva si ha come il prolungamento dell'archetto di essa, così il piano tangente una superficie curva si può avere come il prolungamento dell'elemento della superficie nel luogo del contatto: quindi la normale a quel piano tangente sarà anche normale all'elemento della superficie curva.

P R O P. XLIX. P R O B L.

131. *Tirare un piano tangente ad una superficie cilindrica data di sito, per un punto dato in essa.*

Sieno ab , $a'b'$ (*fig. 30.*) le proiezioni di quella retta cui è costantemente parallela la retta generatrice della proposta superficie cilindrica, la quale superficie abbia per traccia sul piano della proiezione ab la curva pdq ; e sia finalmente c la proiezione su questo piano stesso del punto dato nella superficie proposta.

Si tiri per c la retta cd parallela alla ab ; dinoterà questa cd , com'è chiaro, la proiezione orizzontale di quel lato della superficie cilindrica in cui si trova il punto dato, e l'incontro d di essa parallela colla curva pdq oterà il punto della direttrice, cioè della traccia pdq ,

donde parte un tal lato. Or il piano tangente una tal superficie nel punto dato, dovendo toccarla in tutta l'estensione di un tal lato, dovrà necessariamente incontrare il piano della traccia pdq nella retta dK' che tocca in d questa curva. Adunque sarà questa retta la traccia del piano tangente cercato sul piano di proiezione della traccia pdq . E costruendosi l'altra proiezione del punto dato (*p.* 46.), si potrà facilmente esibire l'altra traccia di un tal piano (*p.* 20.), il quale resterà perciò determinato (*p.* 19.).

132. *Scol.* Se la retta cd avesse incontrata la traccia pdq della superficie cilindrica in più punti, altrettanti sarebbero i lati di questa ne' quali poteva trovarsi quel punto dato per la sola proiezione c , che perciò altrettanti piani tangenti si sarebbero potuti condurre a tal superficie in questo caso, ognun de' quali avrebbe avuto per sua traccia nel piano della proiezione c la tangente corrispondente alla curva pdq .

P R O P. L. P R O B L.

133. *Tirare per un punto dato fuori di una superficie cilindrica data di sito un piano tangente a questa.*

Rappresenti pdq (*fig.* 34) la traccia della data superficie cilindrica, e siano $ab, a'b'$ le proiezioni di quella retta cui è costantemente parallela la generatrice di essa, e c, c' le proiezioni del punto dato, per le quali si tirino le $cf, c'F'$ parallele alle $ab, a'b'$ rispettivamente; saranno queste $cf, c'F'$ le proiezioni di quella retta che dal punto dato si conduce parallela alla generatrice della superficie cilindrica proposta (*p.* 34). Or una tale retta, com'è chiaro, deve esistere nel piano cercato; che perciò la traccia di questo sul piano della pdq dovrà passare per lo punto f in dove questo piano di proiezione è incontrato da quella parallela. Ma una tale traccia deve inoltre esser tan-

gente alla traccia pdq della superficie cilindrica. Adunque essa sarà la fdK' , che per lo punto f si tira tangente alla curva pdq . E la traccia di un tal piano tangente sull' altro di proiezione si esibirà per mezzo della Prop. XX.

Volendosi inoltre determinare le proiezioni della linea di contatto di questo piano tangente colla superficie cilindrica, è chiaro che una delle proiezioni di questa si otterrà tirando per d la de parallela alla ab , e l'altra coll'esibire la proiezione D' del punto d sull' altro piano di proiezione, e tirando poi per questa la $D'e'$ parallela alla $a'b'$.

134. *Scol.* Se più tangenti si potessero condurre dal punto f alla curva pdq , altrettanti sarebbero i piani tangenti ad essa, che gli si potrebbero condurre pel dato punto; e ciascun di questi avrebbe per sua traccia sul piano della pdq una di tali tangenti, e la traccia corrispondente si determinerebbe per mezzo della citata Prop. XX. Che se poi niuna tangente si possa condurre dal punto f alla curva pdq ; in un tal caso niun piano tangente si potrà condurre alla superficie cilindrica proposta dal dato punto fuori di essa. E da ciò resta pienamente determinato il precedente Problema.

PROP. LI. PROBL.

135. *Tirare un piano tangente una superficie cilindrica data di sito, il qual sia parallelo ad una linea retta di sito.*

Sieno ch , $o'h'$ (*fig. 35.*) le proiezioni della retta di sito cui dee esser parallelo il piano tangente una superficie cilindrica, che abbia per sua traccia la curva pdq , e per retta cui è costantemente parallela la sua generatrice quella che ha per proiezioni le ab , $a'b'$.

Si faccia passare per la retta data di sito quel piano ch'è parallelo alla retta che ha per proiezioni le ab , $a'b'$, e sia fl la traccia di questo piano su quello di proiezione della curva pdq (pr. 36.). È chiaro che il piano tangente cercato dovrà essere parallelo al precedente, e quindi incontrare il piano della curva pdq in una retta tangente a questa, e parallela alla fl . Laonde si avrà la traccia di tal piano tangente, su quello di proiezione ov'è la curva pdq , tirando a questa la tangente kuK' parallela alla fl : e tirando per K' la retta $K'k'$ parallela all'altra traccia $N'g'$ del piano che si è condotto parallelo alla generatrice della superficie cilindrica proposta, una tal parallela $K'k'$ sarebbe l'altra traccia del piano tangente cercato (n. 87.).

PROP. LII. PROBL.

136. *Condurre un piano tangente ad una superficie conica data di sito, per un punto dato in essa.*

La soluzione di questo Problema è interamente identica a quella del Problema risoluto nella Prop. XLIX.; e solamente bisogna avvertire, che le proiezioni de' lati di questa superficie, com'è già noto, debbono passare tutte per le corrispondenti proiezioni del vertice del cono date.

PROP. LIII. PROBL.

137. *Condurre un piano tangente ad una superficie conica data di sito, per un punto dato fuori di essa.*

Anche la soluzione di questo problema si può condurre a fine nel modo stesso che quella della Proposizione L.

PROP. LIV. PROBL.

38. *Tirare un piano tangente una superficie conica data di sito, il quale sia parallelo ad una retta di sito.*

Per lo vertice del cono si tiri una retta parallela alla data (p. 34.); e poi per lo punto ove questa parallela incontra il piano di proiezione ove sta la traccia della superficie conica, se ciò avviene, si tiri la tangente a questa traccia: una tal tangente sarà la traccia corrispondente del piano tangente cercato; e l'altra traccia si otterrà come nella Prop. 20.

Che se poi quella parallela non incontri il suddetto piano di proiezione, si avrà la traccia su questo del piano tangente cercato tirando alla traccia della superficie conica una tangente parallela alla proiezione corrispondente della retta, che si è condotta dal vertice suo parallela alla data.

E l'una l'altra di queste cose si comprendono abbastanza da loro stesse.

C A P. VIII.

DE' PIANI TANGENTI LE SUPERFICIE DI RIVOLUZIONE:

PROP. LV. PROBL.

139. *Tirare un piano tangente ad una superficie di rivoluzione il cui asse si supponga perpendicolare ad uno de' piani di proiezione, per un punto dato in essa.*

Sia a (fig. 33.) la proiezione dell'asse della superficie data sul piano di proiezione cui esso è perpendicolare, $A'a'$ l'altra sua proiezione su di un piano che suppongasì perpendicolare a questo primo; $p'd'q'$ la proiezione della generatrice di tal superficie nella posizione in cui è parallela al piano della $A'a'$, la quale sarà perciò una curva identica a tal generatrice. Finalmente sia c la proiezione del punto del contatto sul piano di proiezione ove esiste il punto a , e c' dinoti la corrispondente proiezione di esso sull'altro piano di proiezione, la quale siasi determinata costruendo la superficie proposta (p. 48.).

Or il piano tangente cercato dovendo esser quello, che passa per le tangenti condotte in questo punto dato al cerchio orizzontale che passa per esso, ed alla generatrice verticale della proposta superficie curva, dovrà la sua traccia orizzontale incontrare la ac , traccia corrispondente del piano verticale in cui esiste la poc'anzi detta generatrice, in quel punto ove essa ac è incontrata dalla tangente della generatrice stessa nel punto del contatto dato: e di più siccome il raggio di quel cerchio che va al punto del contatto è parallelo alla ac , e la tan-

gente un tal cerchio nel punto stesso è orizzontale, e quindi parallela alla traccia orizzontale del piano tangente cercato; perciò l'angolo che quelle due rette comprendono nel punto del contatto dovrà essere uguale a quello della ac colla traccia orizzontale di un tal piano tangente (15. El. xi.). Laonde questo sarà retto al pari di quello. Non resta dunque a far altro per esibire una tal traccia, che a determinare il punto ov' essa incontra la ac . Per ottenerlo basta riflettere, che la generatrice della superficie proposta esistente nel piano verticale che passa per ac , e il punto dato in essa hanno rispetto all'asse ed alla ac identico sito a quello, che ha la curva $p'd'q'$, che dinota tal generatrice rappresentata nel piano verticale di proiezione, e'l punto d' , rispetto alla $A'a'$ ed alla $A'M$: che perciò se per lo punto d' si tiri la tangente $d'H'$ alla curva $p'd'q'$, dinoterà la retta $A'H'$ la distanza dal punto a alla quale la tangente la generatrice della proposta superficie curva che passa per lo punto dato in questa incontrava la ac . Laonde tagliando sulla ac la ah uguale alla $A'H'$, ed elevando da h sulla ah la perpendicolare hK' , sarà questa la traccia orizzontale del cercato piano tangente: e la verticale si otterrà coll' ajuto della prop. 20.

PROP. LVI. PROBL.

140. Condurre per una retta di sito un piano che tocchi una superficie sferica data.

Prendasi per un de' piani di proiezione quello cui è perpendicolare in un punto f la retta data (fig. 36.), la quale avrà per conseguenza per sua proiezione sull'altro piano di proiezione la perpendicolare indefinita $F'f'$ abbassata dal punto f sulla LM . Siano inoltre a, a' le

proiezioni del centro della sfera, e il cerchio *pde* la proiezione della stessa sul piano cui si è supposta perpendicolare la retta data: un tal cerchio dinoterà anche la traccia, su questo stesso piano, di una superficie cilindrica circonscritta alla sfera data, la cui generatrice sia una retta parallela alla data; e'l piano tangente dimandato sarà, com'è chiaro, quello stesso, che per un punto qualunque della retta data si condurrebbe a questa superficie cilindrica, cioè avrà per sua traccia sul piano del cerchio *pde* la tangente *fd*, che dal punto *f* si conduce a questo cerchio, e l'altra traccia sarà la perpendicolare elevata alla *LM* nel piano verticale dal punto *K* ov'essa è incontrata dalla *fd*.

L E M M A.

141. *Dati in un piano due cerchi di grandezza e di sito; condurre ad essi una tangente comune.*

ANALISI GEOMETRICA.

Sia *DQ* (*fig. 37.*) una tangente comune a' due cerchi *PDE*, *QGH* dati come poc' anzi si è detto; tirati i raggi *AD*, *QB* a' punti de' contatti risulteranno simili i triangoli *ADK*, *BQK*, e quindi starà $AD : BQ :: AK : KB$: laonde sarà dato nella congiungente *AB* de' centri de' cerchi dati il punto *K* per dove deve passare la tangente comune ad essi.

COMPOSIZIONE GEOMETRICA.

Si prenda nella *AB* il punto *K* in modo che stia $AK : KB :: AD : BQ$; e per *K* si tiri la tangente all' un cerchio; questa dovrà toccare anche l'altro. E ciò è facile a dimostrarsi.

142. *Scol. 1.* È facile il rilevare dalla soluzione del precedente problema, che nella congiungente AB i centri de' cerchi dati vi esistono due punti K diversi, da ciascun de' quali può condursi ad essi cerchi una tangente comune: ed un di questi punti è tra i centri A, B , l'altro nella AB prolungata dalla parte del cerchio minore.

143. *Scol. 2.* Avrei qui volentieri tralasciata la soluzione del problema risoluto nel precedente lemma, come esercizio di scuola, se non fossi stato spinto a recarvela dal trovarne di esso nella Geometria Descrittiva del Signor La Croix una soluzione particolare identica a quella esposta dal Clavio nello Scol. della Prop. XVII. Lib. III. del suo Euclide, e che non per tanto quel sommo analista francese la dà come d'incerto autore, e per semplicissima,

PROP. LVII. PROBL.

144. *Condurre un piano tangente a due superficie sferiche date di grandezza e di sito, e che passi per un punto dato.*

Dinotino i punti a, a' (*fig. 38.*) le proiezioni del centro di una di tali sfere, b, b' quelle del centro dell'altra, e c, c' le proiezioni del punto dato. S'intendano esse sfere segate da un piano parallelo a quello delle proiezioni a, b, c , e sieno i cerchi pde, gqh le proiezioni rispettive delle sezioni prodotte da quel piano segante nelle sfere, cioè le proiezioni delle sfere stesse. Ciò posto, si conduca a' cerchi pde, gqh la tangente comune dqk (*lem. preced.*), sarà questa, com'è chiaro, la proiezione della tangente comune corrispondente in que' cerchi che sono prodotti nelle sfere dal piano segante suddetto; ed il punto k sarà la proiezione sul piano abc di quel punto ove la poc' anzi detta tangente incontra la

congiungente i centri delle sfere date; ed il quale può prendersi come il vertice di quel cono che viene a generarsi dalla suddetta tangente, se essa si concepisca rivolgersi insieme co' semicerchi generatori delle sfere esistenti nel piano secante, intorno alla congiungente i centri di queste; e l'altra proiezione di questo vertice sul piano $a'b'c'$ sarà l'incontro k' della perpendicolare indefinita $kK'k'$ alla LM colla $a'b'$.

Or il piano tangente cercato dee toccare anche una tal superficie conica, e quindi passare per quel punto che ha per proiezioni le k, k' , o sia esso piano dovrà passare per la retta di sito che ha per proiezioni le $ck, c'k'$: che perciò il proposto problema si è ridotto al precedente, cioè a tirare per tal retta di sito un piano tangente ad una delle sfere date.

145. *Scol.* Essende due in diversa posizione le tangenti comuni che possonsi condurre a due cerchi (n. 142.), ne segue, che anche due diverse sieno le superficie coniche circonscrittibili a due sfere, una cioè che le involuppa in una sola superficie conica, l'altra, che le chiude in due opposte: e siccome a ciascuna di queste possonsi tirare due piani tangenti; saranno perciò quattro i piani tangenti due sfere, ed i quali passano per un punto dato; e due di essi le toccheranno da una parte stessa, due altri in sensi opposti.

L E M M A.

146. *Se in un piano vi esistano tre cerchi dati di grandezza e di sito, e ad essi, presi due per volta, si tirino le tangenti comuni, i tre punti ove queste concorrono colle rispettive congiungenti de' loro centri, debbono trovarsi allogati in una retta di sito.*

Si tiri per c (fig. 39.) centro di uno de' tre cerchi dati la retta cl parallela alla congiungente i centri b, a degli altri due, ed una tal parallela si prolunghi fino ad incontrare in l la retta fd che unisce i punti di concorso f, d delle tangenti comuni a' cerchi a, b ; a, c , e che è data di sito; poichè unisce i punti f, d dati di sito: sia in fine e il concorso delle tangenti comuni a' cerchi a, c : dico che un tal punto debba trovarsi allogato nella fd .

S'indichino con R, R', R'' rispettivamente i raggi de' tre cerchi che hanno per centri i punti a, b, c . E perchè deve stare $R:R'::af:fb$ (n. 141.), ed $R':R''::bd:dc$, cioè $bf:cl$; sarà per uguaglià $R:R''::af:cl$. Ma è poi $R:R''::ae:ec$: quindi il punto e dovrà trovarsi allogato nella fd .

147. *Scol.* La dimostrazione di questa verità elementare, ch'è come si vede, una conseguenza immediata dell'analisi geometrica del lemma problematico esposta al num. 141. è stata da' sommi Analisti Francesi Monge, e La-Croix dedotta da considerazioni fondate su i piani tangenti, che possono condursi a tre sfere date; ed il secondo di essi nella prima edizione della sua Geometria Descrittiva la credè inoltre forse non facile a dimostrarsi a priori. Veggasi la Geometria Descrittiva del Monge, e la citata edizione di quella del La-Croix.

PROP. LVII. PROBL.

148. Tirare un piano tangente a tre superficie sferiche date di grandezza, e di sito.

Pe' centri a, b, c (fig. 39.) delle tre sfere date s'è concepisca passare un piano il quale prendasi per uno di quelli di proiezione; e poi si tirino ad essi cerchi presi due a due le tangenti comuni, le quali concorrano colle rette che congiungono i loro centri rispettivamente in f, d ed e ; sarà data di sito la retta fed , che passa per essi (lem. prec.). E perchè ciascuna di quelle tangenti rivolgendosi insieme co' due cerchi che tocca intorno alla congiungente de' centri di questi descrive una superficie conica, tangente le sfere da tali cerchi descritte, si verrebbero perciò in tal rivoluzione a descrivere tre coni circonscritti alle tre sfere date, ed a ciascun de' quali verrebbe ad esser tangente il piano, che deve toccar le sfere; che perciò un tal piano dovrà passare pe' loro vertici, e quindi per la retta di sito fed . Laonde il proposto problema si è ridotto all'altro di condurre per la retta di sito fed un piano tangente ad una di quelle sfere.

149. Scol. Poichè, come fu detto al num. 143, a due cerchi possonsi condurre due tangenti comuni in diversa posizione, saranno perciò sei que' punti in dove le tangenti condotte a tre cerchi presi due per ogni volta incontrano le rispettive congiungenti de' loro centri, cioè f, e, d, k, h, g , e questi presi tre a tre nel seguente modo, cioè f, e, d ; f, k, g , e, k, h ; d, g, h , si troveranno allogati nella stessa retta di sito, cioè fed pe' tre primi, ed fkg, ekh, dgh per gli altri rispettivamente. Laonde il proposto problema resterà sempre risoluto per qualunque di queste quattro rette si conduca un piano tangente ad

una delle tre sfere date : e siccome per una retta si possono condurre ad una sfera due piani tangenti ; perciò saranno otto diversi i piani tangenti tre sfere date, de' quali però due , cioè quelli che passano per la retta *fed* toccano le sfere tutte tre da una stessa parte ; mentre ciascuno de' rimanenti tocca sempre due sfere da una parte , e la terza dalla parte opposta , come facilmente si ravvisa .

LEMMA PROBLEMATICO

150. *Ad una data superficie di rivoluzione circonscrivere una superficie cilindrica , la cui generatrice sia perpendicolare ad un piano dato .*

Per l'asse *BA* (*fig. 40*) della proposta superficie di rivoluzione si concepisca condotto un piano perpendicolare al dato *aA'M*, e questi piani prendansi per quelli di proiezione . Inoltre la curva *BCAD* esistente nel piano condotto per l'asse *AB* sia la generatrice della proposta superficie ; e ad una tal curva si conducano le tangenti *CC'*, *DD'* perpendicolari alla *LM*, cioè al piano dato *aA'M* . Egli è chiaro che queste tangenti dinoteranno que' lati della superficie cilindrica cercata , ne' quali è questa intersegata dal piano *BA'M* . Ciò posto per qualunque punti dell'arco *CBD*, come *e'*, *f'*, ec. si abbassino alla *LM* le perpendicolari *e'EE'*, *f'FF'*, ec. che dinoteranno le proiezioni corrispondenti di altrettanti lati della superficie cilindrica cercata , de' quali se ne determinerà il vero sito , cioè i punti rispettivi d'incontro col piano *aA'M*, nel seguente modo .

Dal punto *D* sull'asse *AB* si abbassi la perpendicolare *Dd* ; e poi presi nell'arco *Cd* i punti *K*, *G*, ec. si abbassino da essi sull'asse medesimo le perpendicolari *KH*, *GN*, ec. Finalmente per le *e'EE'*, *f'FF'* ec.,

e per le KH , GN , ec. s'intendano passare de' piani perpendicolari al piano $BA'M$: è chiaro che i primi di questi piani intersegheranno la superficie cilindrica, ciascuno in un lato corrispondente in proiezione alle rette $e'E'$, fF , ec. per cui si è condotto, e la superficie di rivoluzione in una curva cui tal lato è tangente, e che i secondi di que' piani segneranno nella stessa superficie di rivoluzione tanti cerchi, i cui rispettivi diametri saranno le KH , GN , ec. E per ultimo si concepisce facilmente, che ciascun di que' primi piani con ciascun di questi secondi debbano intersegarsi scambievolmente in una retta perpendicolare al piano $BA'M$ in quel punto, ove intersegavansi le rette per le quali essi si sono condotti, vale a dire in P pe' piani condotti per le Ff , e GN , in Q per gli altri che passano per le Ff , KH ; e così in seguito.

Or supponiamo che vogliasi determinare il lato del cilindro ch'è proiettato in fF . Sulla GN si descriva il semicerchio GRN , al quale si tiri per P la semiordinata PR , questa dinoterà la perpendicolare al piano $BA'M$ in P , sino alla superficie curva di rivoluzione; ed una tal perpendicolare dovendo esistere anche nel piano condotto per fF , dovrà anche esprimere la semiordinata che corrisponde nel punto P alla curva d'intersezione del suddetto piano colla superficie data di rivoluzione: che perciò se dal punto P si elevi alla fF , che si prenda per asse di questa curva, la perpendicolare PT uguale a PR , il punto T si apparterrà ad una tal curva, supposto che essa siasi abbattuta sul piano $BA'M$. Similmente descrivendo sulla KH il semicerchio KSH , tirando in esso per Q la semiordinata QS , e poi prendendo nella perpendicolare QV alla fF la QV uguale alla QS , il punto V si apparterebbe anche alla curva suddetta. E così facendo

continuamente si verrebbe a descrivere per punti sul piano $BA'M$ una tal curva, che venghi dinotata dalla $fTVF$. Or se a questa si conduca la tangente XX' perpendicolare alla LM , e poi si concepisca la curva e la tangente rivolgersi intorno alla fF' , finché il suo piano divenghi perpendicolare all'altro $BA'M$; in questo sito quella tangente dinoterà, com'è chiaro, quel lato della richiesta superficie cilindrica il quale è proiettato in fF' : che perciò l'incontro di esso col piano $aA'M$ si avrà descrivendo col centro F' , intervallo $F'X'$ l'arco di cerchio $X'x$. Sarà dunque x un punto della traccia della superficie cilindrica cercata sul piano $aA'M$; e similmente determinandosi gli altri punti di questa, si verrà finalmente a descrivere la curva CxD' che la rappresenta.

151. Cor. 1. Le proiezioni del punto di contatto X , quando il lato XX' del cilindro è nel suo vero sito, saranno il punto x , e l'altro x' dove la fF' è incontrata dalla parallela Xx' tirata per lo punto X , ch'è nella figura, alla LM .

152. Cor. 11. E quindi la curva di contatto della superficie cilindrica circonscritta alla proposta superficie di rivoluzione avrà per sue proiezioni rispettive la curva CxD' , e l'altra che passa per tutti que' punti x' , e per gli altri G, D .

153. Scol. In una maniera analoga a quella del precedente Problema si potrebbe risolvere l'altro di: *Descrivere una superficie conica tangente una data superficie di rivoluzione, e che abbia per vertice un dato punto*. In tal caso converrebbe prendere il piano di proiezione orizzontale perpendicolare all'asse della superficie data; il piano verticale dovrebbe passare pel punto dato e per quest'asse, ed esso rivolgendosi intorno all'altezza orizzontale del punto dato dovrebbe costituire la serie de' piani seganti la cercata superficie

conica in que'lati di essa, che toccano le corrispondenti linee curve, nelle quali tali piani intersecano la superficie di rivoluzione proposta.

PROP. LIX. PROBL.

154. *Condurre per una retta di sito un piano che tocchi una data superficie di rivoluzione.*

Si prenda per piano di proiezione orizzontale quello cui è perpendicolare in z (*fig. 40*) la retta data di sito; e s' intenda alla proposta superficie di rivoluzione circonscritta quella superficie cilindrica la cui generatrice è perpendicolare a questo piano (150), e quindi sempre in un piano colla retta data: egli è chiaro, che ogni piano tangente tal superficie cilindrica debba anche toccare la proposta superficie di rivoluzione in un punto della linea di contatto di questa con quella. Laonde se per z si tiri alla traccia orizzontale $Cx D'$ di quella superficie cilindrica la tangente zy , sarà questa la traccia orizzontale del piano tangente cercato, il quale essendo verticale, sarà perciò pienamente determinato. Ed una delle proiezioni del punto di contatto sarà il punto y , l'altra quel punto dove la perpendicolare yY' abbassata sulla LM incontra nel piano verticale la proiezione verticale della linea di contatto della superficie di rivoluzione proposta e della cilindrica che gli si è circonscritta (152). C. B. F.

155. *Scol.* Un tal problema si sarebbe potuto anche risolvere, descrivendo una superficie conica tangente la superficie di rivoluzione, e che avesse per vertice un punto preso nella data retta di sito, e poi conducendo a tal superficie conica un piano tangente per un altro punto della retta stessa. Ma la soluzione che vi abbiamo recata, oltre all'essere più semplice, ha il

merito di procedere sugli stessi principj di costruzione su i quali era fondata quella del caso particolare del problema presente , che per ragion di metodo si era già risoluto nella Prop. LVI.

PROP. LX. PROBL.

156. *Tirare ad una superficie di rivoluzione un piano tangente parallelo ad un piano dato .*

Sia , come nella prop. LV. (fig. 41.), a la proiezione dell' asse della superficie data sul piano di proiezione cui esso è perpendicolare , $A'a'$ l'altra sua proiezione su di un piano che suppongasi perpendicolare a questo primo , $p'd'q'$ la proiezione della generatrice di tal superficie nella posizione in cui è parallela al piano verticale di proiezione , la quale sarà perciò una curva identica a tal generatrice . Finalmente sieno Ef , Ef' le tracce di quel piano cui deve esser parallelo quello che si vuol tirare tangente alla superficie proposta .

Si supponga passare per l'asse della superficie data un piano perpendicolare al dato fEf' ; un tal altro piano avrà per sue tracce la gaH' perpendicolare alla Ef , e la $H'h'$ perpendicolare alla LM , ed interscogherà il piano fEf' , ed il piano tangente che si cerca in due rette parallele tra loro; vale a dire che la tangente della generatrice della proposta superficie curva in quel punto ov' essa è toccata dal piano tangente che vuol tirarsi deve essere parallela alla comune sezione de' piani fEf' , $gH'h'$; e l'asse della superficie proposta dovendo incontrare il piano dato nella sua comune sezione coll' altro $gH'h'$, la proiezione di tal punto d' incontro sul piano della $p'd'q'$ dovrà essere il punto b' ove s' intersecano la proiezione $A'a'$ di quell' asse, e l'altra della comune sezione suddetta, la

quale si determina facilmente , come nella prop. xxv.

Or si concepisca quel piano verticale condotto per l'asse rivolgersi intorno a questo , fintantochè divenga parallelo all'altro di proiezione verticale , cioè finchè la sua 'traccia gaH' sia parallela alla LM ; in un tal caso tutto quello ch'è in esso segnato , cioè la curva generatrice della superficie proposta , la comune sezione di esso col piano dato , e la tangente la suddetta curva parallela a quella comune sezione , avranno un identico sito alle loro proiezioni sul piano di proiezione verticale : che perciò se col centro a , intervallo ag si descriva l'arco gk , il punto k darà il luogo ove la comune sezione de' piani $fE'f$, $gH'h'$ incontra il piano orizzontale di proiezione , allorchè il piano $gH'h'$ passa nel nuovo sito ; e se un tal punto k si proietti in K' , congiunta la $K'b'$ sarà questa la proiezione verticale di quella parte di tal comune sezione , ch'è interposta tra l'incontro di essa coll'asse della superficie data , e 'l punto k ; e da quello che si è detto la $K'b'$ rappresenterà anche la vera posizione di tal retta per rapporto alla curva generatrice della superficie proposta . Laonde se alla curva $p'd'q'$ si tiri la tangente dT parallela alla $K'b'$, questa dinoterà la tangente alla curva proposta nel luogo ov'essa è incontrata dal piano tangente cercato , cioè sarà d' il punto del contatto ; che, perciò proiettandosi il punto d' in d sulla ak , e poi descrivendosi un cerchio col centro a intervallo ad , il punto c ove la circonferenza di questo cerchio intersegherà la gaH' , rappresenterà la proiezione orizzontale di quel punto di contatto di cui la proiezione verticale sarà il punto c ove incontransi la parallela alla LM tiratale per d' , e la perpendicolare abbassatale da c . Ed il problema presente si sarà ridotto all'altro risoluto nella prop. LV.

C A P. XI.

DE' CONTATTI CIRCOLARI, E SFERICI.



157. Le ricerche che proporrò in questo capitolo sono dirette a risolvere in una maniera semplice e geometrica due principalissimi problemi , quello cioè de' tre cerchi da farsi toccare da un quarto , e l'altro delle quattro sfere da farsi toccare da una quinta . Mi sono indotto ad inserire tali problemi nel presente trattato , primieramente per la loro natura analoga all'argomento de' due precedenti capitoli , e poi perchè l'impegno che vi hanno posto in risolverli i più celebri Geometri moderni , tra quali il Vieta , il Fermat , il Newton , e l'Eulero , m'imponevan l'obbligo di trattarne , or che del primo di essi dal Sig. Fergola , e dell'altro da me se ne sono date delle soluzioni uniformi , ed eleganti . Chiunque vorrà vedere risolti per mezzo di un medesimo principio tutti gli altri problemi di queste due famiglie potrà riscontrare le due nostre Memorie , inserite nel primo volume degli Atti della Reale Accademia delle Scienze di Napoli , che ora sta stampandosi , e la cui pubblicazione sarà forse contemporanea a quella del presente trattato . Tali altre soluzioni però non hanno alcuna difficoltà , e possonsi da ognuno supplire dopo quellò che qui ne reco de' principali problemi tra esse (*) .

(*) Tutt' i problemi della prima famiglia , cioè quelli delle *Tazioni* , così detti dagli antichi , furono dal Pappo compresi in questa generale enunciazione : *Punctis , et rectis lineis , et circulis tribus quibuscunque positione datis , circulum describere per unumquodque datorum punctorum , qui unamquamque linearum datarum*

Alle ricerche che forman l'oggetto di questo Capitolo ve se ne troveranno aggiunte altre non meno importanti, che hanno con esse una grandissima affinità. Finalmente conviene avvertire, che di tali problemi io qui ne distendo solamente le analisi geometriche, senza punto impegnarmi a comporli, o a divisarne i casi diversi; perchè queste cose possonsi di leggieri supplire da qualunque giovanetto, e ciò o servendosi de' dati, e quindi costruendoli geometricamente, o pur de' determinanti de' dati su due piani ad angolo, come si è fatto nelle costruzioni del presente trattato.

158. *Def.* Se nella base di un triangolo, e dal punto medio di essa si prenda una terza proporzionale in ordine alla semibase, ed alla semidifferenza de' lati, la perpendicolare elevata su detta base dall'estremo di tal retta si dirà *Direttrice* di quel lato verso del quale questa si è presa.

159. Così la base AB (fig. 42) del triangolo ADB si bissechi in C, e presavi la retta CP terza proporzionale dopo le due rette AC ed $\frac{1}{2}$ (DB—DA), si elevi ad AB dal punto P la perpendicolare PS; questa potrà chiamarsi la direttrice del lato AD il quale colla PS è dalla stessa parte del punto C. E prendendovi Cp uguale a CP, ed alzata dal punto p la ps perpendicolare ad AB, sarà la ps direttrice del lato DB, per esser le due rette ps e DB dall'altra parte del punto C, cioè amendue a destra di C, come si vede.

contingat. E ad imitazione di Pappo il Fermat comprese tutti quelli dell'altra famiglia de' contatti sferici nella seguente generale enunciazione. *Quaerenda sit sphoera, quae per data puncta transeat, aut sphoeras, et data planu contingat;* al che conviene solamente aggiungere, che tali cose date debbono essere sempre al numero di quattro.

PROP. FONDAMENTALE. TEOR.

160. Se diasi la base AB del triangolo ADB , e la differenza de' lati di esso DB , DA , ciascuno di questi due lati avrà una data ragione alla perpendicolare abbassata dall'angolo verticale D sulla sua direttrice.

Dim. Cas. 1. Col centro D , intervallo DA , che sia il minore de' due lati del proposto triangolo, si descriva il cerchio EAV , e l'altro lato DB si prolunghi insino alla circonferenza in E , e si bissechi la BA in C , e la BV in G , sarà $AC:BG::BG:CP$; e quindi $BG^2 = AC \times CP$, e prendendo i loro quadrupli anche $BV^2 = AB \times 2CP$. Ciò premesso dal punto D si abbassi la DR perpendicolare ad AB , e vi si prenda Cr uguale alla CR ; sarà la rimanente parte rB uguale alla rimanente RA ; e quindi Rr , ch'è la differenza delle due RB ed rB , sarà uguale alla differenza de' due segmenti RB ed RA della base del triangolo, cioè alla BH . Vale a dire l'è $2CR = BH$, e $BH = 2CP = 2CR = 2CP = 2PR$.

Or per la natura del cerchio il rettangolo EBV è uguale all'altro ABH . Dunque togliendo da essi rispettivamente il quadrato di BV , e l' suo uguale rettangolo di AB in $2CP$, come si è dimostrato precedentemente, resterà il rettangolo EBV uguale all'altro di AB in $BH = 2CP$; cioè di AB in $2PR$. E quindi sarà EV a $2PR$, cioè prendendone le metà loro, AD a DS , come AB a BV , la qual ragione è data.

Cas. 2. L'aggregato de' due rettangoli EBV e BV^2 è uguale alla somma degli altri due ABH ed $AB \times 2PC$, che a quelli si sono mostrati rispettivamente uguali.

Dunque sarà $2DB \times BV = AB \times (BH + 2PC) = AB \times (2CR + 2PC) = AB \times 2Rp$. E quindi starà DB ad Rp, o alla sua uguale Ds nella data ragione della base AB alla BV differenza de' lati.

LEMMA I. PROBLEMATICO.

161. *Dato di posizione il punto B (fig. 43) e la retta AH terminata in H; inclinare da quel punto su di questa retta la BC; la quale stia al segmento CH troncato da essa su di quella in una data ragione, cioè della retta m all'altra n.*

SOLUZIONE GEOMETRICA.

Prendasi Hc uguale ad n. Si congiunga la BH, e dal punto c si adatti sulla BH la cb uguale ad m. Di poi da B si conduca la BC parallela alla bc: sarà EC a CH, come bc a cH, per triangoli simili BGH, bch, cioè come m ad n.

SOLUZIONE ANALITICA.

Dal punto B si abbassi la BK perpendicolare alla AH; poi pongasi $BH=a$, $HK=b$, $BK=c$, e $KC=x$. Sarà $HC=b-x$, e $BC=\sqrt{cc+xx}$. E per le condizioni del problema dovrà stare $\sqrt{cc+xx}:b-x::m:n$; onde avrassi la seguente quadratica equazione

$$cc+xx=\frac{mn}{nn}(b-x)^2$$

Che agevolmente potrà ordinarsi, risolversi, e geometricamente costruirsi. Ella intanto ha due radici, onde due punti dovranno rinvenirsi, quando il problema non sia impossibile. E due punti anche rilevansi dalla precedente soluzione geometrica, ma nella BH.

PROP. LXI. PROBL.

162. *Dati di posizione e di grandezza i tre cerchi GK, MN, RE (fig. 44), descriverne un altro, che insieme tocchi que' tre cerchi dati.*

ANALISI GEOMETRICA.

Si concepisca essere il punto C il centro del cerchio da descriversi, e da esso a' centri B, A, D de' cerchi dati si conducano le rette CB, CA, CD, e si tirino benanche le altre AB, AD. Sarà data di grandezza la retta AB base del triangolo ACB, e vi sarà anche data la differenza de' lati di esso, ch'è $AM - GB$. Dunque, per la proposizione fondamentale (160), sarà data di sito la PS direttrice del lato AC, e vi sarà data la ragione di un tal lato AC alla CS che dal punto C si mena perpendicolare alla PS.

In simil modo si dimostrerà esser data la ragione di AC a Cs perpendicolare calata dal punto C sulla ps direttrice dello stesso lato AC nel triangolo ACD. Dunque sarà data la ragione de' due lati CS e Cs del quadrilineo CSHs, i cui angoli sono dati. Ed ei sarà dato di specie, e la sua diagonale HC sarà data di posizione. Il perchè essendo date, per la proposizione fondamentale, e per esser dato di specie il triangolo CSH, le due ragioni di AC a CS, e di CS a CH, sarà anche data quella di AC a CH. E quindi la presente indagine si ridurrà al precedente lemma problematico (161).

163. *Scol. A questo Probl. si riduce immantinente l'altro di: Descrivere una sfera che tocchi tre altre sfere date di grandezza e di sito, e che abbia il suo centro*

nel piano che passa pe' centri di quelle. Imperocchè è chiaro, che il cerchio generatore della sfera cercata sia per l'appunto quello che tocca i tre cerchi generatori delle date segnati in esse dal piano che passa pe' loro centri.

LEMMA II. TEOR. LOCALE.

164. *Tutti que' punti da ciascun de' quali abbassandosi le perpendicolari su tre piani di sito che s'incontrano, queste serbansi tra loro costantemente la stessa ragione, che le tre rette date m , n , r debbono essere allògati in una retta di sito.*

Sieno MN , RS , TV (fig. 45) i tre piani dati di sito, e sia primieramente X un punto dal quale se si abbassino su i due di essi MN , RS le perpendicolari BX , CX , sieno queste tra loro come m ad n .

Si concepisca per la comune sezione RN di questi due piani, e per lo punto X condotto un altro piano, nel quale si prenda un qualsivoglia punto x , e si prolunghi la Xx , che unisce quel punto con questo, fino alla RN in Z , e poi congiungansi le BZ , CZ . Finalmente dal punto x su de' piani MN , RS si abbassino le altre perpendicolari bx , cx , le quali è chiaro, che debbano cadere nelle BZ , CZ , ed esser quindi tra loro come le BX , CX , cioè nella ragione di m ad n . Quindi il piano RXN sarà il luogo geometrico di tutti i punti X , x , ec. da' quali abbassate le perpendicolari su i piani dati MN , RS , sieno queste tra loro come m ad n .

Similmente il luogo geometrico di tutti que' punti da' quali abbassate le perpendicolari su i piani RS , TV sieno queste tra loro nella ragione data di n ad r si troverà essere un altro piano di sito condotto

per la TS. Dunque la comune sezione di quel piano con questo sarà il luogo geometrico di que' punti da ciascun de' quali abbassandosi le perpendicolari su de' tre piani di sito MN, RS, TV, sono esse tra loro nella ragione delle rette date m, n, r .

Ciò posto ecco in qual modo resterà determinato il sito del luogo geometrico suddetto. Poichè tutti que' punti da' quali abbassate le perpendicolari su i piani MN, RS, queste sono nella ragione data di m ad n , debbono essere allogati in un altro piano, che passa per la RN, sia X uno di tali punti (fig. 46), e si prolunghi la CX, una delle due perpendicolari, quella al piano RS, finchè incontri l'altro piano MN, sarà data la ragione di BX ad XN, per esser dato di specie il triangolo BXN in cui oltre l'angolo retto vi è dato l'angolo in N complemento di quello d'inclinazione de' piani dati; ma è anche data la ragione di BX a CX. Dunque è data la ragione di CX ad XN; e sarà perciò dato il punto X per dove passa il piano RXN (fig. 45); che perciò un tal piano sarà dato di sito. E similmente determinando il sito di quell' altro piano che passa per la TS, e ch' è il luogo geometrico di que' punti donde abbassando su i piani di sito RS, TV le perpendicolari, queste sono nella ragione data di $n : r$, si vedrà esser anche dato il sito della comune sezione di questi piani, ch' è il luogo geometrico in quistione.

LEMMA III. PROBLEMATICO.

165. *Determinare in una retta di sito un punto, il quale se congiungasi con un altro dato, e da esso si abbassi la perpendicolare su di un piano di sito, sia quella congiungente in una data ragione a questa perpendicolare.*

ANALISI GEOMETRICA.

Sia MN (*fig. 47*) il piano di sito, ed A il punto dato: e rappresenti O quel punto della retta di sito QO, dal quale abbassata sul piano MN la perpendicolare OP, e congiunta la OA, sieno queste due rette tra loro nella data ragione di $m : n$.

S'intenda condotta per la retta di sito QO un piano perpendicolare al dato MN, dovrà in questo giacere la OP; ed il triangolo POQ essendo dato di specie, sarà data la ragione di OP ad OQ. Ma è anche data la ragione di AO ad OP; quindi sarà pur data la ragione che componesi da queste due, cioè quella di AO ad OQ: ond'è che il problema proposto riducesi ad inclinare dal dato punto A fuori della retta di sito QO terminata in Q, a questa retta, la AO, la quale stia al segmento OQ che da essa ne tronca, verso il punto Q, in una ragion data, cioè al Lemma Problematico del Sig. Fergola.

PROP. LXII. PROBL.

166. *Date quattro sfere di grandezza e di sito, descriverne un'altra che le tocchi.*

ANALISI GEOMETRICA.

Sieno A, B, C, D (*fig. 48*) i centri delle sfere date, ed O il centro di quella da descriversi, il qual si congiunga co' centri delle date per mezzo delle OA, OB, OC, OD, e si conducan pure le AB, AC, AD. Ciò posto nel triangolo AOB essendo data la base AB, e la differenza de' lati BO, OA, sarà dato il punto E

della base per dove passa la direttrice EF del lato AO, e quindi la ragione di un tal lato alla perpendicolare OF, che cade sulla EF (160): e perciò se si faccia passare per la EF un piano perpendicolare alla AB, un tal piano sarà dato di sito, e la perpendicolare OF alla EF essendo anche perpendicolare ad un tal piano sarà pur data la ragione di AO alla perpendicolare OF dal punto O abbassata su di questo piano. Similmente dovrà esser data la ragione di AO alla perpendicolare OH, che dal punto O si abbassa su quel piano perpendicolare alla AC, il quale passa per la direttrice GH del lato AO nel triangolo AOC; e così pure è data l'altra ragione della AO alla OL, che dal punto O si abbassa perpendicolarmente a quel piano normale alla AD condottole per la direttrice KL del lato AO nel triangolo AOD. Quindi è anche data la ragione delle tre perpendicolari OF, OH, OL; e perciò il punto O sarà allogato in una retta di sito (164): ed il proposto problema si ridurrà ad inclinare dal dato punto A a questa retta di sito la AO, sicchè abbassata dal suo estremo O su quel piano che passa per la EF la perpendicolare OF, sia data la ragione di AO ad OF, cioè al precedente lemma problematico (a).

(a) La semplicità del metodo qui tenuto in risolvere il presente Problema, in paragone di quello usato dal Fermat, potrà facilmente rilevarsi dall'orditura dell'analisi geometrica, ch'egli vi stabilì per esso, e che or qui reco: *Sit factum* (ecco com'egli ragiona,) *et qua usus est methodo Apollonius Gallus* (Vieta), *ut problema de tribus circulis ad problema de puncto et duobus circulis deduceret, eadem et simile precedentibus fumosum hoc et notabile problema ad duodecimum, datis tribus sphaeris et puncto deducemus*. E questo problema duodecimo cui egli riduce il proposto, per mezzo del terzo lemma da esso stabilito, si riduce al

L E M M A IV.

167. *Le tre rette che congiungono i punti corrispondenti delle scambievoli intersezioni di tre cerchi, o concorrono in un medesimo punto, o pur sono parallele tra loro.*

Sieno EFG, GIH, HIE (fig. 49 e 50) i tre cerchi che s'interseghino ne' punti F, E; G, K; I, H, e congiunte le GK, EF, queste si taglino in *a*: dico che l'altra retta IH debba anche incontrarsi con quelle due in *a*:

Imperocchè si unisca la Ia, e questa s'è possibile non passi per H; ma interseghi il cerchio GIH in S, e l'altro EFH in R, saranno uguali i rettangoli RaI, EaF delle parti delle corde RI, FE del cerchio HIE. Ma il rettangolo EaF è uguale all'altro GaK, essendo le FE, KG corde dello stesso cerchio GKE; e questo rettangolo GaK è finalmente uguale all'altro SaI, perchè GK ed IS sono corde del medesimo cerchio GKH. Dunque sarà il rettangolo RaI uguale all'altro SaI, e perciò aS uguale ad aR. Il che essendo impossibile, dovrà la HI passare per *a*.

Che se la GK suppongasì parallela alla HI (fig. 51), dovrà anche la FE esser parallela ad entrambe. Perchè se la FE incontrasse la GK in *a*, congiunta la aI, si dimostrerà come poc'anzi, che questa non possa intersegare i due cerchi GIH, HFE in due punti diversi, ma che debba passare per H. Adunque la HI non sa-

nono, il quale poi, per lo stesso lemma, lo fa dipendere dal terzo, e questo finalmente dal problema del Vieta di: *Descrivere un cerchio il qual passi per due punti, e tocchi un altro cerchio dato.*

rebbe parallela alla GK come si è supposto, che perciò la FE dovrà esser necessariamente parallela alla GK.

165. Cor. 1. È facile a rilevarsi dalla precedente dimostrazione anche quest'altra verità, cioè, che: *Se nella linea retta FE (fig. 49, e 50), che unisce i punti d'intersezione F, ed E de' due cerchi FGE, HIE si prenda un punto a ad arbitrio, dal quale si tirino a que' due cerchi le corde GK, HI; per gli estremi G, K, I, H di queste vi dovrà passare un cerchio.*

Imperocchè è chiaro che i rettangoli GaK, IaH sono uguali tra loro, essendo ciascun di essi uguale al rettangolo EaF.

166. Cor. 2. Inoltre si rileva anche chiaramente, che se la GK (fig. 51) si bissechi in Y, dal qual punto si elevi ad essa la perpendicolare; questa dovrà passare pe' centri B e C de' due cerchi GFK, GIH che intersegansi. E per la stessa ragione se la HI si divida per metà in Z, donde le si elevi la perpendicolare, questa dovrà passare pe' centri C, D de' cerchi GHK, HFE, che anche s'intersecano. Laonde se le GK, HI si suppongano parallele, le CB, CD, che sono le perpendicolari condotte ad esse dallo stesso punto C, dovranno formare una sola retta; e perciò: *Se risultano parallele le linee che uniscono le intersezioni rispettive di tre cerchi; i loro centri giaceranno in una medesima linea retta: ed al contrario.*

167. Scol. Il Sig. Carnot ha anch'egli dimostrata la sola prima parte della prop. prec. ricavandola dall'intersezione delle sfere che hanno per cerchi generatori i tre dati (*Geomet. de pos. n. 306*); una tal sua dimostrazione non è però certamente modellata sul vero sistema geometrico: ed egli stesso di ciò convinto si scusa dicendo di aver preferita tal maniera di dimostrare ad un'altra più diretta, e fatta senza ricorrere alle sfere;

perchè quella gli era sembrata più semplice. Ma io non so se chi leggerà la dimostrazione del Sig. Carnot la potrà dire più semplice di quella che qui si è recata. Che anzi è dal teorema da noi dimostrato che possonsene ricavare facilmente i seguiti altri due per le sfere che s'intersecano.

T E O R. I.

168. *Se tre sfere s'intersecano scambievolmente, i piani de' cerchi in cui s'incontrano due a due, dovranno concorrere in una medesima retta perpendicolare al piano che passa pe' centri di esse sfere, o pure essere parallele tra loro.*

Imperocchè sieno GKH, HFE, GKE (fig. 49) i tre cerchi generatori delle sfere proposte, segnati nel piano che passa pe' centri C, D, B di queste; e congiunti i punti corrispondenti delle intersezioni di tali cerchi, queste congiungenti concorrano primieramente in a (164). È chiaro che nel rivolgersi che fanno i cerchi GKH, HIE intorno a' loro diametri coincidenti colla CD, ch'è la congiungente i loro centri, per generar due delle proposte sfere, la retta IZ, ch'è perpendicolare alla CD descriverà quel cerchio, ch'è l'intersezione di tali sfere, ed il cui piano sarà perpendicolare al piano BCD. Similmente rivolgendosi i cerchi HIE, EKG intorno a que' loro diametri che coincidono colla congiungente BD de' loro centri; le sfere che sono da essi generate s'intersegneranno in un cerchio, che avrà per diametro la FE perpendicolare alla BD, ed il cui piano sarà perpendicolare al piano BCD. Ed in simil guisa si dimostrerebbe, che la sfera generata dal cerchio EKG, e quell'altra che vien descritta

dal cerchio GKH s'interseghino nel cerchio descritto dalla GY, il cui piano è perpendicolare al piano CBD. Or i diametri GK, HI, FE di questi tre cerchi s'interseghino in a , ed i loro piani sono perpendicolari allo stesso piano BCD; dunque è chiaro ch'essi cerchi si dovranno interseghere in una' retta perpendicolare in a a quel piano BCD.

Che se le rette GK, HI, FE (fig. 51) fossero risultate parallele tra loro; in un tal caso i cerchi d'intersezione delle proposte sfere, avendo per loro diametri rispettivi queste linee, ed i loro piani essendo normali allo stesso piano BCD, dovrebbero esser anche paralleli.

T E O R. II.

169. *Tre superficie sferiche, che s'interseghino scambievolmente, non hanno che due soli punti di comune.*

Sieno come poc'anzi GKH, HFE, GKE (fig. 49) i cerchi generatori delle tre sfere proposte, segnati nel piano che passa pe' centri di esse, e congiungansi i punti corrispondenti delle intersezioni di questi cerchi colle GK, HI, EF: dovranno queste necessariamente concorrere in uno stesso punto a (164). Per lo che essendo uguali i rettangoli GaK, IaH, EaF, dovrà a' tre cerchi d'intersezione corrispondere per lo punto a comune a' loro diametri una stessa semiordinata, la quale sarà perpendicolare al piano BCD (168): quindi le loro semicirconferenze che sono al di sopra del piano BCD, dovendo passare tutte tre per l'estremo di questa semiordinata, verranno ad avere un punto di comune; ed un altro ne avranno quelle che restano dalla parte di sotto dello stesso piano BCD: ond'è che que-

ste tre circonferenze s'intersegneranno scambievolmente in due punti; e perciò anche in questi due punti s'intersegneranno scambievolmente le superficie delle tre sfere proposte.

LEMMA V. PROBLEMATICO

170. *In una piramide triangolare dati i suoi sei lati; determinare l'altezza del vertice di ciascun suo angolo sul piano opposto, e l punto ove questo è incontrato da quella perpendicolare.*

Il triangolo BCD (fig. 49) rappresenti la base della proposta piramide, ed O il vertice di essa; si vuol determinare il punto a ove la perpendicolare Oa abbassata da O sul piano opposto BCD incontra un tal piano, e di più la grandezza di tal perpendicolare.

COMPOSIZIONE GEOMETRICA.

Co' centri B, C, D e co' raggi α , β , γ uguali rispettivamente a' tre rimanenti lati della piramide proposta si descrivano i tre cerchi KEG, HEG, HIE, i quali s'interseghino scambievolmente ne' punti E, F; I, H; K, G, e si uniscano le EF, GK, HI, queste si dovranno intersegare scambievolmente nel punto a (164), che sarà quello ove la perpendicolare cercata incontra il piano BCD, e tal perpendicolare sarà quanto le media proporzionale aO ritrovata tra Ga ed aK.

Imperocchè congiunta la Ba sarà $BO^2 = Oa^2 + aB^2 = GaK + aY^2 + EY^2 = KY^2 + BY^2 = IK^2$, e quindi $BO = BK = \alpha$: e così dimostrando che CO sia quanto β , e DO quanto γ , sarà perciò il punto O il vertice della piramide proposta, ed Oa la sua altezza.

ALITER

ANALISI GEOMETRICA.

171. Poichè (fig. 52) $CO^2 - OB^2 = Ca^2 - aB^2$, e quindi a $CE^2 - EB^2$, sarà data la differenza $CE^2 - EB^2$, che dicasi M^2 , e quindi sarà dato il punto E nella BC. Imperocchè essendo $CE^2 - EB^2 = M^2$, sarà $CB \times (CE - EB) = M^2$, e perciò

$$CB : M :: M : CE - EB$$

Laonde sarà data la $CE - EB$, e perciò il punto E.

Adunque si saprà la locale Ea del punto a ; e determinando similmente l'altra locale Fa dello stesso, si farà noto il punto a , per conseguenza la aE ; e finalmente l'altezza aO della piramide si otterrà dall'ipotenusa BO data, e dal dato cateto Ba .

172. Scol. Rilevandosi dal Teor. 2. dello Scol. della prop. prec. che quel punto che dista da' tre dati, da una parte del piano di questi, per intervalli dati, non sia che uno, si comprende chiaramente che il presente lemma problematico resti completamente risoluto.

PROP. LXIII. PROBL.

173. Descrivere una sfera di un dato raggio la quale tocchi tre sfere date di grandezze e di sito.

ANALISI GEOMETRICA.

I centri B, C, D , (fig. 53) delle sfere date si congiungano tra loro, e col centro O della sfera da descriversi; rappresenterà il punto O il vertice di una piramide triangolare della quale ne sono dati tutti i lati: che perciò pel lemma precedente si potrà determinare il sito di un tal punto.

154. *Scol.* Oltre a quella famiglia di Problemi compresi nell'enunciazione generale recata dal Pappo nella Prefazione al lib. VII. delle Collezioni Matematiche, e da noi riportata nella nota al n. 157; l'intero genere de' Problemi delle Tazioni risolti da Apollonio Pergeo ne' due libri di questo nome, che formavan parte del luogo di risoluzione delle Greche Scuole, veniva completato da un'altra classe di Problemi deficiente nell'ipotesi dalla predetta; ma più abbondante nella determinazione del quesito, la qual classe vien dal Pappo stesso compresa in quest'altra generale enunciazione: *Ex punctis, et rectis lineis, et circulis quibuscumque duobus datis, circulum describere magnitudine datum, qui per datum punctum, vel data puncta transeat; contingat autem unamquamque daturum linearum.* E tra tutt' i problemi compresi in questa enunciazione, ch'egli enumera, e che sono sei, il principale sarebbe quello di: *Descrivere un cerchio dato di grandezza, che tocchi due cerchi dati*, del qual problema, come ognuno facilmente si accorgerà, è intuitiva la soluzione. Or ad imitazione di questa seconda classe di problemi delle Tazioni, si potrebbe completare anche il genere di quelli de' contatti sferici coll'altra de' problemi compresi nella seguente enunciazione generale: *Dati tre qualunque tra punti, piani, e sfere; descrivere una sfera di grandezza data, la quale passi pe' punti dati, e tocchi i piani, e le sfere date*, della qual classe il principal problema è quello che abbiamo poc' anzi risoluto (173). Ed i giovani potranno per loro esercizio cercar la soluzione de' rimanenti problemi di queste due altre enunciate classi, avvalendosi de' principj che si sono da noi stabiliti.

C A P. X.

DELLE INTERSEZIONI DELLE SUPERFICIE CURVE.



175. Allorchè due superficie curve s'intersecano nello spazio; è egli chiaro, che dati i determinanti del loro sito, e della loro forma dovranno anch'essere dati quelli della forma e posizione della linea nella quale essi s'intersecano: ed è precisamente della ricerca del metodo, onde da' que' primi passare a questi secondi, che ci occuperemo nel presente Capitolo. Or siccome una tal linea d'intersezione deve ritrovarsi nell'una e nell'altra delle due superficie curve, di cui rappresenta la comune sezione; perciò deve essa generalmente partecipare della curvatura di entrambe, ed esser quindi, come suol dirsi, una *curva a doppia curvatura*, cioè tale, che per essa non può in alcun modo farvisi passare un piano. Una tal linea d'intersezione può intanto, in alcuni casi, essere anche una linea a semplice curvatura, cioè ch'esista in un piano, come l'è, per esempio, quella che risulta dall'intersezione di due superficie sferiche, in altri casi più particolari anche una retta, come sarebbe l'intersezione di due superficie coniche, le quali avessero il vertice comune; e finalmente in altri casi può tal intersezione divenire anche un punto, se, cioè, le due superficie intersegantisi diventassero tangenti l'una dell'altra, e fossero di tal natura, o talmente disposte da doversi toccare in un punto solo. Ma eccone delle cose finora dette in astratto un più preciso dettaglio, e delle teorie consacranti al nostro argomento.

176. *Def. XVII. Construire l'intersezione di due superficie curve date* è lo stesso, che rappresentarne, per mezzo de' determinanti del sito e della forma di tali superficie, le rispettive proiezioni di essa intersezione su que' piani stessi, ove eran dati que' determinanti.

177. *Scol.* Una tal ricerca sebbene esiga, secondo la diversa natura delle superficie che s'intersecano, e talvolta anche secondo la diversa posizione ch'esse possono avere, considerazioni speciali; pur tuttavia non sarà fuor di proposito di qui appresso adombrare generalmente il metodo conducente ad essa; il qual poi resterà rischiarato dalla risoluzione di que' Problemi che risolveremo in appresso.

PROP. LXIV. PROBL. GENERALE.

178. *Abbozzare il metodo generale onde costruire l'intersezione di due superficie curve date di sito e di forma, le quali s'intersecano.*

Concepiscansi esse superficie segate da una serie di piani, i quali serbino tutti nello spazio una stessa posizione determinata, cioè sieno tutti paralleli ad un piano di sito, o passino tutti per una retta data di posizione. Scelgansi però tali piani seganti in modo, che le intersezioni di essi con ciascuna delle proposte superficie intersegantisi sieno facili a conoscersi, ed a rappresentarsi, per mezzo delle loro proiezioni. Ciò posto per ognuno di questi piani seganti si determinino i punti ne' quali s'intersecano le proiezioni delle linee curve da esso prodotte nelle superficie curve proposte, e che saranno precisamente le proiezioni di que' punti che in tal piano segante si trovano esser comuni a tali superficie; la curva o que' rami di curva, che passerà su ciascun piano di proiezione, per tutti

que' punti, che col precedente metodo si saranno esibiti su di esso, dinoterà la proiezione corrispondente dell' intersezione da costruirsi.

179. *Scol.* Il metodo esposto nel precedente problema, sebbene sia generale, ed applicabile ad ogni quistione ove propongasì a costruire l' intersezione di due superficie curve, ha però bisogno di molta prudenza di chi lo adopera, per essere vantaggiosamente applicato: poichè esigendosi per esso, come si è veduto, a fin di determinare que' punti dell' intersezione di due superficie curve che ritrovansi in uno stesso piano segante, di costruire le due linee da questo in quelle rispettivamente segnate; sarà tal costruzione tanto più semplice ed elegante, quanto più facili ad esibirsi sono le proiezioni di queste linee, le quali in molti casi, scegliendosi convenevolmente i piani seganti, non sono che rette e cerchi, e quindi capaci ad essere esibite con un moto facile e continuo. Bisogna dunque prima d' imprendere la soluzione di un problema di questo genere, che si mediti bene sulla genesi delle superficie delle quali se ne vuol determinare l' intersezione, e sulla scelta de' piani seganti; affinchè il metodo proposto per costruire l' intersezione delle superficie curve, il quale, per altro, è di sua natura lungo, e penoso, riesca in pratica della maggior facilità ed eleganza possibile. E talvolta, per ottener elegantemente la soluzione di uno di questi problemi, bisognerà rinunciare al sistema de' piani seganti, ed impiegare superficie curve le cui intersezioni colle proposte sieno più facili a determinarsi che quelle de' piani; del che se ne vedrà un esempio nella Prop. LXX. cas. 1.

PROP. LXV. PROBL.

180. *Construire l'intersezione di due superficie cilindriche date di sito.*

Le due curve xgv , zfu (fig. 54) rappresentino le tracce di esse superficie su di uno stesso piano di proiezione, e le cd , $C'd'$ sieno le proiezioni di quella retta alla quale è costantemente parallela la generatrice della superficie cilindrica che ha per traccia xgv ; ab , $A'b'$ quelle dell'altra retta cui è costantemente parallela la generatrice dell'altra superficie cilindrica proposta. Si tiri per questa retta un piano parallelo alla prima (89), e di un tal piano ne sia ae la traccia sul piano di proiezione ove esistono le curve xgv , zfu ; ed a questa ae si tirino, nello stesso piano di proiezione, quante si vogliano parallele fk , che interseghino le due tracce xgv , zfu , per ciascuna delle quali si concepisca condotto un piano parallelo a quello che passava per ae . Egli è chiaro, che ognun di tali piani intersegherà le due superficie cilindriche proposte in que' loro lati, che passano pe' rispettivi punti f , h , g , k ne' quali le due curve xgv , zfu sono segate dalla corrispondente fg : ed è anche chiaro, che si apparterranno all'intersezione da costruirsi que' punti ne' quali questi lati s'intersecano, ove ciò avvenga.

Per esibir questi tali punti d'incontro, si tirino pe' punti f , h le rette fl , hm parallele alla ab , saranno tali parallele le proiezioni corrispondenti, sul piano della traccia zfu , di que' lati della superficie cilindrica di questa traccia, che la incontrano ne' punti f ed h : e proiettando questi punti in F' , H' sull'altro piano di proiezione, le parallele $F'l'$, $H'm'$ condotte per F' ed H' alla $A'b'$ dinoteranno le proiezioni corrispondenti de' suddetti lati di tal superficie cilindrica. Similmente

determinando sul piano di proiezione ove esiste la xgv le proiezioni gi , kn di quegli altri lati della superficie cilindrica di questa traccia, che passano per gli punti g , k , e poi le corrispondenti proiezioni $G'i$, $K'n$ di essi sull' altro piano di proiezione: i punti p , q , r , s ove s'interseghano su di un piano stesso di proiezione, quello delle curve xgv , zfu , le proiezioni corrispondenti de' lati dell' una, e dell' altra superficie cilindrica, dinoteranno su questo piano le proiezioni de' punti comuni a que' lati di esse superficie, e quindi ad esse, nel piano condotto per la retta fk . E similmente gli altri punti p' , q' , r' , s' ove s'intersegheranno, sull' altro piano di proiezione, le corrispondenti proiezioni de' suddetti lati, saranno le altre proiezioni de' punti stessi.

Laonde se ciò si continui a fare, la curva che si condurrà per tutti i punti p , q , r , s così determinati, sarà, nel piano di essi, la proiezione dell' intersezione delle due superficie cilindriche date, e l' altra curva che passa per tutti gli altri punti p' , q' , r' , s' dinoterà l' altra proiezione dell' intersezione stessa.

181. *Cor.* Se la direttrice del lato di una delle due superficie cilindriche fosse una retta, colla stessa costruzione del precedente problema, si sarebbe costruita l' intersezione di una data superficie cilindrica, e di un piano dato di posizione. Che se in questo caso si supponga che l' un de' piani di proiezione sia perpendicolare alla generatrice della superficie cilindrica, e l' altro al piano dato di sito che intersega questa; allora l' intersezione da costruirsi avrebbe per una delle sue proiezioni la traccia data della superficie cilindrica, e per l' altra quella parte della traccia del piano dato, che nell' altro piano di proiezione resta tra quelle tangenti la traccia della superficie cilindrica, che sono perpendicolari alla comune sezione de' piani di proiezione.

E volendo esibir la curva d'intersezione tal quale essa è nel piano segante, cioè la sua vera forma, ciò si otterrà facilmente per mezzo della Prop. xxxi.

182. *Scol.* Siccome i limiti del sistema di piani seganti le due superficie cilindriche proposte debbono esser que' piani condotti ad esse, i quali sono paralleli al piano di sito che ha per traccia la ae , e che sono gli ultimi ad intersegare le due superficie cilindriche, così si vede che i limiti del sistema di rette parallele alla ae , che debbono condursi nel piano di proiezione delle curve zfu , xgv , per effettuare la soluzione del precedente problema, sieno contenuti tra le ultime rette parallele alla ae , che intersegano le curve suddette: laonde bisognerà condurre queste tali rette prima di cominciar la costruzione di un tal Problema. Ed è pur anche a proposito l'avvertire, che la ricerca di tali limiti in questi problemi delle intersezioni è essenzialissima, prima d'incominciar la costruzione di talun di essi, per non essere obbligato ad operazioni superflue, e non conducenti alla soluzione cercata. Intanto ciò che si è qui solamente accennato su questo argomento potrà bastare per gli altri casi; che perciò noi tralascieremo in appresso una tal considerazione, lasciandola ai giovani.

Inoltre conviene avvertire, che la curva che passa pe' punti p , q , r , s , e similmente l'altra condotta per gli altri punti p' , q' , r' , s' potrà constare di un ramo solo, o pur di due, o anche più distinti tra loro; il che dipende dalla diversa posizione e natura delle superficie che s'intersegano.

PROP. LXVI. PROBL.

183. *Construire l'intersezione di due superficie coniche date di sito.*

Sieno a, a' , (*fig. 55*) le proiezioni del vertice di una delle due superficie coniche, ed xgv la sua traccia su di uno de' piani di proiezione: sieno poi b, b' le proiezioni del vertice dell'altra superficie conica, e xfu dinoti la traccia di essa sul piano stesso della precedente.

Si prenda per direttrice de' piani seganti quella retta che unisce i vertici delle due superficie coniche, e che ha per sue proiezioni le $ab, a'b'$: che perciò se si determini il punto i ove tal retta incontra il piano delle tracce xgv, xfu (50); la traccia su di questo di un qualunque di que' piani seganti potrà dinotarsi con una retta qualunque if tirata per lo punto i in modo che seghi le due tracce delle superficie coniche proposte; ed i punti f, h, g, k ove queste sono segate dalla if saranno quelli per dove passano que' lati di esse, che esistono nel piano segante corrispondente, ed i quali avranno per loro proiezioni sul piano della if , le $ga, ka; fb, hb$. Laonde i punti p, q, r, s ove le precedenti proiezioni di que' lati s'intersegneranno, saranno le proiezioni corrispondenti di quelli altri ne' quali s'incontrano i suddetti lati, o sia de' punti comuni alle due superficie coniche proposte, nel piano da cui si sono fatte segare. Se dunque si continui la stessa costruzione, si verrà a determinare una serie di punti p, q, r, s , pe' quali facendosi passare una curva, sarà questa la proiezione dell'intersezione da costruirsi, nel piano della if .

Per aver poi l'altra di tali proiezioni, è chiaro,

che bisognerà proiettare , per ogni retta if , che si è tirata , i punti f , h , g , k , sull' altro piano di proiezione , in F' , H' , G' , K' : congiunte le $F'b'$, $H'b'$; $G'a'$, $K'a'$ saranno queste le altre proiezioni corrispondenti di que' lati delle superficie coniche date , che ritrovansi nel piano segante condotto per if ; ed i punti p' , q' , r' , s' ove tali proiezioni s'intersecano , saranno le proiezioni , su quest' altro piano di proiezione , dell' intersezione di que' tali lati , e quindi de' punti che in tal piano si trovano esser comuni alle due superficie coniche date . Laonde la curva che passerà per tutti questi punti così determinati sarà l' altra proiezione cercata della curva d' intersezione da costruirsi .

PROP. LXVII. PROBL.

185. *Construire l' intersezione di una superficie conica data di sito , con una superficie cilindrica similmente data .*

Prendasi l' un de' piani di proiezione perpendicolare alla generatrice della superficie cilindrica , e sia acb (*fig. 56*) la traccia di questa superficie su' tal piano , $degf$ quella della superficie conica , ed h , h' le proiezioni del vertice di questa .

Si concepisca passare per l' altezza di tal vertice sul piano delle tracce acb , $degf$ un sistema di piani seganti , la traccia di un de' quali sul piano stesso di proiezione sia la retta hcg ; il punto c ove tal retta intersega la traccia acb della superficie cilindrica, sarà la proiezione di quel lato della superficie suddetta , che si trova in tal piano segante , ed incontra la traccia acb in c : ed abbassando da c sulla LM la perpendicolare indefinita $cC'c'$, sarà $C'c'$ la corrispondente proiezione di tal lato sull' altro de' piani di proiezione . Inol-

tre si proietti il punto g , ove la stessa retta hcg intersega la traccia della superficie conica, in G' sull'altro de' piani di proiezione, e congiungasi la $G'h'$, saranno le hg , $h'G'$ le corrispondenti proiezioni del lato della superficie conica, ch'è nello stesso piano secante, ed il quale incontra la traccia di questa in g . Laonde il punto p' ove intersegansi le $C'c'$, $G'h'$ sarà la proiezione del punto d'intersezione di que' lati delle due superficie curve proposte, i quali contengonsi nello stesso piano secante condotto per la hg' . E determinando similmente moltissimi altri di questi punti p' ; la curva condotta per essi disegnerà una delle proiezioni dell'intersezione cercata, e quindi questa si sarà costruita, mentre l'altra proiezione di essa, a cagione della maniera come si è stabilito il piano di proiezione delle tracce acb , $degf$, cade nella stessa traccia acb della superficie cilindrica; e non resta al più che definirne il corso: il che si ottiene col fissare i limiti del sistema de' piani secanti (182).

187. Cor. Se la direttrice della retta che genera la superficie cilindrica, cioè la sua traccia acb , diventasse anche una retta, si sarebbe, per mezzo del precedente problema, costruita l'intersezione di una superficie conica data di sito con un piano di sito perpendicolare a quello di proiezione ove si supponeva data la traccia della superficie conica; e la vera forma di una tal curva si potrà esibire per mezzo della Prop. xxxi.

LEMMA

188. Se da' punti di una curva, ch'è in un piano, s'intendano condotte delle rette tutte uguali fra loro, e prossimissime l'una all'altra; la curva che passerà per tutti questi altri estremi di tali rette sarà identica alla proposta.

Sia ACB (*fig. 57*) la curva proposta, e da' suoi punti C, D, E, F , ec. prossimissimi l'uno all'altro siensi condotte le Cc, Dd, Ee, Ff , ec. tutte fra loro uguali, e parallele. E poichè Cc è uguale e parallela a Dd ; congiunte le CD, cd , queste saranno ancora uguali e parallele. Similmente si dimostrerà che sia DE uguale e parallela a de , EF uguale a parallela ad ef , e così in seguito: che perciò gli angoli CDE, DEF , ec. saranno rispettivamente uguali agli angoli corrispondenti cde, def , ec.; e quindi il sistema delle CD, DE, EF , ec. si potrebbe far combaciare col sistema delle cd, de, ef , ec., cioè il perimetro d'infiniti lati inscritto nella curva ACB , per mezzo della costruzione indicata, si potrebbe far combaciare col corrispondente nell'altra curva acb , che passa per tutti i punti c, d, e, f che si sono assegnati. Dunque tali perimetri saranno identici; e perciò anche tali saranno le curve in cui essi si terminano.

189. *Cor.* Quindi si vede in qual modo si possa per un punto dato nel piano di una data curva descriverne un'altra identica alla proposta: ed è anche chiaro, ch'esse debbano essere tra loro parallele; come pure che qualunque altro sistema di parallele vi si conduca da' punti dell'una all'altra, queste debbano tra loro pareggiarsi.

PROP. LXVIII. PROBL.

190. *Construire l'intersezione di una superficie cilindrica data di sito con un'altra di rivoluzione intorno ad un asse verticale, anche data di forma e di sito.*

Sieno $gh, g'h'$ (*fig. 58*) le proiezioni di quella retta cui è parallela la generatrice della data superficie cilindrica, ed abc dinoti la traccia di essa su quello

de' piani di proiezione cui è perpendicolare in d l'asse della data superficie di rivoluzione. Sia inoltre $e'd'f'$ la proiezione della generatrice di quest'altra superficie sopra di un piano perpendicolare al primo, e la proiezione del suo asse su questo stesso piano sia espressa dalla $D'd'$ perpendicolare sulla LM .

Ciò posto, si tiri in questa curva $e'd'f'$ qualunque ordinata $m'l'$ all'asse $D'd'$, per la quale si supponga condotto un piano orizzontale: un tal piano segnerà nella superficie di rivoluzione un cerchio del raggio $m'n'$, che avrà per proiezione orizzontale il cerchio psr descritto col centro d , e col raggio $m'n'$. Inoltre col cateto $n'D'$ e coll'angolo opposto ad esso, uguale a quello in cui inclinasi al piano orizzontale la generatrice della superficie cilindrica (80), si descriva il triangolo $n'D'X'$, e tagliata la bg uguale alla $D'X'$, si descriva per g la curva gpq identica all'altra abc (188); sarà questa la proiezione della comune sezione del piano orizzontale condotto per la $m'l'$ colla superficie cilindrica; e perciò i punti p, q , ov' essa intersega il cerchio psr , saranno le corrispondenti proiezioni orizzontali di que' punti comuni alle due intersezioni prodotte da quel piano segante nelle superficie curve proposte, cioè di que' punti che sono ad esse comuni in tal piano. E proiettandosi questi punti p, q in p', q' sulla $m'l'$ nell'altro piano di proiezione, si avranno così le corrispondenti proiezioni verticali de' punti suddetti delle superficie proposte. Laonde, continuandosi la stessa costruzione, si verrà in tal modo ad assegnare una serie di punti p, q ec. sul piano orizzontale, ed un'altra corrispondente p', q' , ec. sul verticale; e facendo passare una curva pe' primi di essi, ed un'altra pe' secondi, saranno queste le rispettive proiezioni dell'intersezione cercata.

E sarà facile poi a rilevarsi, che per mezzo di un

simile sistema di piani seganti si potrà costruire l'intersezione di una superficie di rivoluzione dintorno ad un asse verticale con un piano di sito, il quale, per maggior facilità, si potrebbe prendere perpendicolare a quello di proiezione verticale.

191. *Scol.* Se mai la superficie di rivoluzione data fosse stata quella di una sfera; in tal caso il piano orizzontale si sarebbe preso perpendicolare alla generatrice del cilindro, e così sarebbe restata facilitata grandemente la soluzione del presente problema: poichè la proiezione orizzontale della comune sezione di ciascun piano segante colla superficie cilindrica, sarebbe stata la stessa traccia di questa; e tal traccia avrebbe anche rappresentato la proiezione orizzontale dell'intersezione da costruirsi; per lo che di questa proiezione non sarebbe stato bisogno, che di fissarne solamenti i limiti, la qual cosa facilmente si vede come debbasi eseguire. Laonde la presente ricerca si sarebbe ridotta a determinare la sola proiezione verticale, che si sarebbe anche ottenuta in quel modo che sta indicato nel Problema precedente. E lo stesso, poco fa detto, avrà luogo, se mai essendo qualunque la superficie di rivoluzione, fosse però il suo asse parallelo alla generatrice della superficie, nel qual caso il piano di proiezione orizzontale, che si prende perpendicolare a questa, sarebbe anche perpendicolare a quello.

L E M M A.

192. *Se nel piano di una curva si prenda un punto, dal quale si tirino delle rette a' punti di quella, ed in queste si ascindano, dal punto preso, parti proporzionali alle intere linee rette tirate; la curva che passerà per tutt'i punti in tal modo assegnati in esse, sarà simile alla proposta.*

Sia ACB (fig. 59) una curva, ed O il punto preso nel

piano di essa, dal quale a' punti C, D, E, F ec. della curva sieno condotte le OC, OD, OE, OF ec. prossime l'una all'altra, e sieno c, d, e, f , ec. que' punti ove siffatte congiungenti restano divise in una stessa ragione data. E poichè $CO : OD :: CO : Od$, sarà il triangolo COD simile all'altro cOd ; e così dimostrandosi degli altri, i due poligoni $CDEFO, cdefO$ saranno simili tra loro: che perciò il perimetro $CDEF$ inscritto nella curva ACB si troverà esser simile all'altro corrispondente $cdef$, ch'è inscritto nell'altra curva acb , vale a dire, che i lati corrispondenti dell'uno e dell'altro s'inclineranno in angoli uguali, e saranno di più proporzionali tra loro. Laonde anche le curve ACB, acb , che sono i limiti di tali perimetri, saranno tra loro simili.

193. *Cor.* Quindi si rileva in qual modo data una curva in un piano, si possa per un punto dato nel piano stesso descrivere una curva simile ad essa, e con una data scala.

PROP. LXIX. PROBL.

194. *Construire l'intersezione di una superficie di rivoluzione data di sito e di forma intorno ad un asse verticale, con una superficie conica anche data di sito.*

Il punto d (*fig 60*) sia la proiezione orizzontale dell'asse della superficie di rivoluzione data, la retta $D'd'$ perpendicolare alla LM sia la corrispondente proiezione verticale dello stesso; e la curva $g'd'f'$ sia la proiezione verticale della generatrice della proposta superficie di rivoluzione, allorchè nel suo rivolgimento intorno all'asse trovasi in un piano parallelo a quello di tal proiezione; l'altra curva abc poi dinoti la traccia della data superficie conica, il cui vertice sia proiettato in c, c' .

Si tiri una qualunque retta $l'm'$ parallela alla LM ,

e la quale sia la traccia verticale di un piano orizzontale che interseghi le due proposte superficie; sarà un cerchio la comune sezione di esso col solido di rivoluzione, ed avrà per raggio la semiordinata $n'm'$ nella curva $g'd'f'$; e di esso se ne avrà la proiezione orizzontale descrivendo col raggio suddetto e col centro d l'altro cerchio qps . Or lo stesso piano segante segnerà nella superficie conica una curva simile alla traccia abc di questa, e che avrà per proiezione una curva identica ad essa, la quale si otterrà nel seguente modo, cioè: si conduca per lo punto c la cb , ed il punto b ove tal retta intersega la curva abc si progetti in B' sulla LM , e si unisca la $B'c'$, saranno cb , $c'B'$ le proiezioni di quel lato del cono proposto che passa per b .

Or si divida la cb in k in modo che stia $eb :: ek :: B'c' :: c'k'$, e poi per k , si descriva la curva pkq simile alla data abc (*lemma psec.*), saranno k , k' le proiezioni corrispondenti di quel punto K della curva d'intersezione, ch'è nel piano orizzontale condotto per la $l'm'$, in dove è essa incontrata dal lato suddetto; e la curva pkq sarà la proiezione di una tal intersezione. Finalmente è chiaro che i punti p , q ove la curva pkq intersega il cerchio pqs , sieno le proiezioni orizzontali corrispondenti di que' punti ne' quali s'intersecano nello spazio le comuni sezioni del piano segante condotto per la $l'm'$ colle due superficie date, o sia que' punti comuni a queste, i quali esistono in un tal piano; e p' , q' ne dinotteranno la corrispondenti proiezioni verticali. E determinando in simil modo una serie di punti come p , q sul piano orizzontale, ed altrettanti come p' , q' sul verticale di proiezione; la curva, o i rami di curva, che passerà pe' primi, sarà la proiezione orizzontale dell'intersezione che dovevasi costruire, e l'altra condotta pe' secondi ne sarà la corrispondente pro-

jezione verticale; che perciò una tale intersezione si sarà costruita (176).

PROP. LXX. TEOR.

195. *Costruire l'intersezione di una superficie conica con quella di una sfera data.*

Sol. Cas. 1. Sieno primieramente concentriche queste due superficie, cioè che il vertice del cono sia centro della sfera, e sieno a , a' (*fig. 61*) le proiezioni del centro comune, nqd la traccia orizzontale data della superficie conica, $a'm'$ il raggio della sfera, e l'cerchio $l'f'g'm'$ la proiezione verticale di essa. Ciò premesso, si concepisca passare per l'altezza orizzontale Aa' del centro comune delle due superficie date una serie di piani, saranno questi tutti verticali, e ciascuno di loro intersegherà la superficie conica in un sistema di rette, proiettate tutte orizzontalmente nella traccia orizzontale del corrispondente piano secante, e la superficie della sfera in un suo cerchio massimo; ed i punti ne quali s'incontreranno, per ciascun piano, quelle rette con questo cerchio, si appartefranno all'intersezione da costruirsi. Rappresenti la retta nad la traccia orizzontale di uno di questi piani, dovranno le generatrici nelle quali esso incontra la superficie conica passare per n , d , ed esser proiettate sulla nd : e se si abbassino da questi punti sulla LM le perpendicolari nN' , dD' , congiunte le $N'a'$, $D'a'$, dinoteranno queste le rispettive proiezioni verticali di quelle stesse generatrici.

Per costruire que' punti in dove queste rette incontrano la circonferenza del cerchio segnato nella sfe-

ra dal piano stesso; si tiri per a la retta $fa g$ parallela alla LM , e poi s'intenda il proposto piano segante rivolgersi dintorno alla Aa , finchè la nd coincida colla fg : è chiaro che in un tal moto non si varierà l'altezza orizzontale di essi punti d'intersezione; che i punti d , n descrivendo gli archi circolari dg , nf verranno ad applicarsi in g , f sulla fg ; e che proiettando questi in G' , F' , le $G'a'$, $F'a'$ dinotino le proiezioni verticali delle generatrici della superficie conica, che passavano per d , n , nel nuovo sito che ha preso il piano segante che le contiene. Inoltre i punti g' , f' , ov'esse intersegneranno rispettivamente la circonferenza $l'f'g'm'$, ch'è la proiezione verticale dell'intersezione di esso piano colla superficie della sfera, considerata anche nella posizione che ha presa in virtù del movimento del piano, saranno le proiezioni verticali de' punti dell'intersezione dimandata, considerati anche nella nuova posizione di un tal piano. Il perchè le proiezioni di essi punti nel vero loro sito dovranno esistere nelle parallele $g'h'$, $f'k'$ alla LM , tirate pe' punti g' , f' , ed esser perciò i punti h' , k' ove queste rette incontrano rispettivamente le $D'a'$, $N'a'$, che doveano pur contenerle; e se si proiettino i punti h' , k' sulla nd in h , k , saranno questi le corrispondenti proiezioni orizzontali degli stessi punti d'intersezione. E facendo passare una curva per tutt' i punti h' , k' determinati nel modo stesso, ed un'altra per tutt' i punti h , k , saranno queste le rispettive proiezioni dell'intersezione proposta.

Cas. 2. Se non sono concentriche le due superficie, si prenda per direttrice de' piani seganti quella linea retta che unisce i due centri loro, e stabiliscasi il piano di proiezione verticale parallelo a questa; saranno

pure linee rette le intersezioni di ciascun piano secante colla superficie conica, e cerchi massimi quelle che han luogo colla sfera; e tutta la soluzione si condurrà a fine come nel caso precedente.

LEMMA

196. *La proiezione di un cerchio il cui piano è inclinato a quello su cui si proietta, è un'ellisse, che ha per centro la proiezione del centro del cerchio dato, ed in cui l'asse maggiore è quanto il diametro di questo, ed esso sta al minore, come il raggio al coseno dell'angolo d'inclinazione del cerchio al piano di proiezione.*

Il piano $aA'a'$ (fig. 62) in cui esiste il semicerchio $b'Dc'$ sia perpendicolare al piano $a'A'M$, e quindi inclinisi a quello di proiezione $MA'a$ nell'angolo dato $a'A'M$. Dagli estremi b' , c' del diametro di quel semicerchio si abbassino sulla LM le perpendicolari $b'B'$, $c'C'$, saranno B' , C' , i limiti della curva $B'd'C'$, che dinota nel piano $aA'M$ la proiezione del cerchio proposto. Or da un qualunque punto d preso nella $b'c'$ si tiri la $d'D'$ perpendicolare alla LM , e per essa si concepisca un piano perpendicolare all'altro $a'A'M$; è chiaro che questo dovrà intersegare il piano $aA'a'$ in una retta perpendicolare alla $A'a'$, e quindi segnare nel semicerchio $b'Dc'$ una sua semiordinata $d'D$, di cui un estremo d' sarà proiettato in D' , e l'altro D in d ; che perciò la $d'D$ sarà quanto la sua proiezione $D'd$. E poichè $d'D' = b'd'c' = D'd$, sarà perciò $D'd^2 : B'D'C' :: b'd'c' : B'D'C' :: (b'd' : B'D') (d'c' : D'C')$, e finalmente come il quadrato di $A'a'$ a quello di $A'C'$. Vale a dire che la curva $B'd'C'$ è tale, che in essa il quadrato di una qualunque semiordinata dD' sta al rettangolo $B'D'C'$ delle

ascisse da entrambi i vertici, nella costante ragione del quadrato di $A'e$ a quello di $A'C'$. Adunque essa sarà un'ellisse in cui l'asse maggiore starà al minore, come $A'e : A'C'$, ossia come il raggio al coseno dell'angolo $a'AM$. Ma allorchè la semiordinata $O'e$ di quest'ellisse passa per la proiezione O' del centro o' del cerchio dato, dee essa pareggiare il raggio $o'E$ di quel cerchio, ed essere il semiasse maggiore di tal ellisse. Adunque ec.

PROP. LXXI. PROBL.

197. *Costruire l'intersezione di due superficie di rivoluzione.*

Sol. Cas. 1. Abbiamo primieramente esse superficie i loro assi in un piano stesso, e suppongasi un di questi perpendicolare al piano orizzontale, e l' piano verticale parallelo a quello che vien determinato dagli assi stessi.

Ciò posto, sia a (*fig. 63*) la proiezione orizzontale dell'asse verticale, $A'a'$ la proiezione verticale dello stesso, $c'd'e'$ la curva generatrice della superficie corrispondente, rappresentata sul piano verticale: e sia ab la proiezione orizzontale dell'asse dell'altra, $B'a'$ la verticale, ed $f'd'h'$ la generatrice di una tal superficie rappresentata anche sul piano verticale; è chiaro, che saranno a, a' le proiezioni di quel punto nel quale i due assi si segano.

Concepiscasi adesso una superficie sferica avente per centro un tal punto, intersegare le due superficie date; sarà proiezione verticale di essa il cerchio $i'a'o'p'$ descritto col centro a' e col raggio della sfera; una tal superficie avendo l'asse di comune con ciascuna delle date, intersegherà, come è chiaro, ognuna di

queste in un cerchio, perpendicolare all'asse della stessa. Che perciò, la proiezione verticale dell'intersezione della sfera colla prima di tali superficie sarà la retta $n'o'$ perpendicolare alla $A'a$; e l'orizzontale sarà il cerchio no descritto col centro a e col diametro $n'o$; e l'intersezione della stessa superficie sferica coll'altra delle date avrà parimente, per sua proiezione verticale la retta $k'p'$ perpendicolare alla $a'B'$; e il punto r nel quale s'intersecano le $n'o'$, $k'p'$ sarà, com'è chiaro, la proiezione verticale di que' due punti ne' quali si tagliano le circonferenze de' due cerchi proiettate verticalmente in $n'o'$, $k'p'$, cioè di due punti dell'intersezione da costruirsi. Se dunque per tutti i punti r così determinati si conduca una curva, sarà questa la proiezione verticale di essa intersezione.

Proiettando ciascun punto r sulla circonferenza del cerchio corrispondente tro in r , r ; saranno questi le proiezioni orizzontali de' due punti d'incontro delle circonferenze de' cerchi suddetti, i quali si trovano sulla stessa sfera; e la curva tirata per tutti questi punti r similmente determinati sarà la proiezione orizzontale dell'intersezione stessa.

Cas. 2. Esistano in secondo luogo gli assi delle due superficie date in piani diversi; e si continui tuttavia a supporre un di loro perpendicolare in a al piano orizzontale e l'altro piano verticale parallelo ad entrambi; dovrà la proiezione orizzontale dell'altro asse esser parallela alla LM (fig. 64); dinotino finalmente le $A'a'$, $B'b'$ le proiezioni verticali rispettive di tali assi, e le curve $a'c'd'$, $b'd'g'$ segnate sul piano di proiezione verticale sieno le generatrici corrispondenti delle due superficie di rivoluzione.

Ciò posto, si tirino nel piano verticale le rette Ff ec. tutte perpendicolari alla $B'b'$; e per queste si sup-

pongano passar de' piani normali a quello e ciascun di questi piani segnerà nella superficie di rivoluzione che ha l'asse verticale, una curva della quale potrà determinarsene la proiezione orizzontale, col metodo stesso della prop. LXVIII, convenevolmente modificandolo; ed incontrerà l'altra superficie data, al cui asse è perpendicolare, in un cerchio, che avrà per sua proiezione l'ellisse rtg (196), ed i punti r, t ne quali queste due curve s'incontrano, saranno le proiezioni orizzontali di altrettanti punti dell'intersezione da costruirsi, che esistono in uno stesso piano seguente FF' . Se dunque per tutti questi punti r, t similmente determinati si faccia passare una curva, questa rappresenterà la proiezione orizzontale di quell'intersezione.

Proiettando i punti r, t in r', t' , sulle rispettive tracce $F'f'$ di quel piano seguente, nel quale contengonsi i punti d'intersezione de' quali essi r, t ne sono le proiezioni orizzontali; e poi tirando per tutti questi altri punti r', t' in tal modo determinati una curva, si otterrà la proiezione verticale dell'intersezione stessa.

C. A. P. XI.

DE' DETERMINANTI DELLE LINEE CURVE NELLO SPAZIO ; E
DE' PRINCIPALI PROBLEMI CHE SI POSSONO RISOLVERE
SU DI ESSE.

198. Si è già veduto nel n. 81 quali fossero i determinanti della forma e posizione di una linea curva nello spazio, allorchè essa esisteva in un piano di sito; bisogna adesso estendere questa ricerca alle curve a doppia curvatura, ed indi risolvere sulle une e sulle altre alcuni principali problemi; il che eseguiremo nel presente Capitolo: ne' due seguenti poi, per un saggio delle teorie in questo generalmente esposte, ci occuperemo di alcune speciali considerazioni su due linee curve a doppia curvatura, cioè sulla *spirale cilindrica*, e sull'*epicloide sferica*.

PROP. LXXII. TEOR.

199. *I determinanti del sito e della forma di una curva a doppia curvatura, sono le proiezioni di essa su due piani ad angolo.*

Imperocchè essendo data una sola delle sue proiezioni, è anche data quella superficie cilindrica, che ha per direttrice tal proiezione, e per retta generatrice la perpendicolare al piano in cui quella esiste. Similmente è data la posizione dell'altra superficie cilindrica che ha per traccia l'altra proiezione della curva proposta nello spazio, e per generatrice una retta per-

pendicolare al piano di quest'altra proiezione: laonde tal linea curva non potrà essere che quella sola in cui queste due superficie cilindriche s'intersecano, e perciò sarà data di sito (180).

E siccome di ogni punto della linea curva proposta nello spazio se ne hanno le due proiezioni, si ha quindi l'altezza di esso su di uno de' piani di proiezione (37), e per conseguenza il lato che corrisponde nella superficie cilindrica retta a tal piano. Laonde si potrà in questa superficie cilindrica segnare un tal punto; e così facendo per ogn' altro, si verrebbe a disegnare su di questa l'effettiva linea curva data per mezzo delle sue proiezioni, che perciò si sarà esibita la sua forma.

200. *Cor.* Da ciò si vede, che per determinanti della forma e posizione di una linea curva a doppia curvatura possansi anche benissimo prendere due superficie qualunque date di sito, in ciascuna delle quali quella si supponesse esistere; perchè si è veduto nel Capitolo precedente, che da queste si poteva costruire la loro intersezione, e quindi la curva in quistione.

201. *Scol.* Sebbene sieno i poc' anzi detti i determinanti generali del sito, e della forma di una qualunque linea curva a doppia curvatura nello spazio, talune volte però essa può restare meglio determinata col darsi la legge del moto del punto generatore; e questo metodo praticavasi dagli antichi geometri nel definire alcune di esse; come or ora passeremo a vedere.

202. *Def.* Se restando fisso il lato OI (fig. 66) del rettangolo $AOIE$, questo si rivolga intorno ad un tal lato, e che nel tempo stesso si concepisca un punto da A scorrer equabilmente lungo l'altro lato AE in modo tale, che nel mentre quel rettangolo compie un'intera rivoluzione, e quindi genera un cilindro,

quel punto si trovi col suo moto sulla AE giunto in C; un tal punto con questi due moti combinati genererà sulla superficie del cilindro la linea curva ADC, che si dirà *spirale cilindrica*, *spirale Apolloniana*, e volgarmente *elica*.

203. Una tal linea curva è precisamente quella che ci vien rappresentata nelle arti dal rilievo di una vite, o dall'intersezione di una scala a lumaca col muro su cui poggia.

204. E se, supponendo indefinito il rettangolo OE, dopo che il punto mobile da A è giunto in C, continui a scorrere col moto stesso sulla CE, ed il rettangolo compia intorno alla OI un'altra rivoluzione, mentre quel punto da C passa in E, si verrà da esso a descrivere, come poc'anzi, un altro ramo di curva CHE continuo al precedente, ed identico ad esso; e così in seguito se ne potrebbero concepir descritti degli altri all'infinito.

205. Considerando come una sola curva l'intera ADCHE ec., la distanza AC, l'altra CE, o ogn'altra di que' punti ov' essa è incontrata dallo stesso lato AE del cilindro, si dirà *passo della spirale cilindrica*.

206. *Scol.* Una tal curva a doppia curvatura può anche intendersi generata dal raggio OA, il quale mentre rota intorno al punto O, per generare il cerchio, scorre col suo estremo O lungo la retta OI perpendicolare al piano di quel cerchio; e la spirale cilindrica sarebbe allora quella curva, che vien descritta dall'altro estremo A.

207. Or ad imitazione della spirale cilindrica può concepirsi una descritta un'altra sulla superficie di un cono, nel seguente modo.

208. *Def.* Se il triangolo rettangolo DOA (fig. 67) si rivolga intorno al cateto fisso DO, e che nel tempo

stesso un punto scorra sulla sua ipotenusa da D verso A in modo che quando quel triangolo ha compita un'intera rivoluzione, quel punto si trovi giunto in A: un tal punto con tali due moti descriverà sulla superficie del cono che vien generata dal lato DA una curva DBA, che si dirà *spirale conica*.

209. E continuandosi il moto di rotazione dell'angolo ODA intorno alla DO, ed il moto stesso progressivo del punto lungo la DA indefinita, si verrà dopo un'altra rivoluzione intera di quell'angolo a descrivere un altro ramo di spirale conica continuo col primo; e così in seguito.

210. Def. Inoltre se il quadrante circolare KOH (fig. 68) si rivolga intorno al raggio fisso OH, finché ritorni nel luogo stesso dove cominciò il suo moto; e che nel tempo stesso un punto scorra equabilmente da H in K lungo la circonferenza HNK; un tal punto col suo doppio moto descriverà sulla superficie dell'emisfero generato da quel quadrante la linea curva HIK, che si dirà *spirale sferica*.

PROP. LXXIII. PROBL.

211. Date le proiezioni di una curva, ch'è nello spazio, determinare s'essa sia a semplice, o pure a doppia curvatura.

Sieno *abcd*, *a'b'c'd'* (fig. 69) le proiezioni della curva proposta; e primieramente se una di esse, la *abcd* per esempio, fosse una retta, una tal curva nello spazio, non potrebbe essere che a semplice curvatura; poiché essa in tal caso dovrebbe risultare dall'intersezione della superficie cilindrica normale al piano della proiezione *a'b'c'd'* che avrebbe questa curva per traccia, e del

piano verticale a quello della proiezione $abcd$, e che ha per sua traccia su di questo la retta data: adunque una tal curva dovrà esistere in questo piano, e perciò essere a semplice curvatura. Suppongasi dunque, che ambe le proiezioni $abcd$, $a'b'c'd'$ sieno linee curve. Si prendano in una di esse $abcd$, ad arbitrio, i quattro punti a , b , c , d , i quali si proiettino sull'altra curva in a' , b' , c' , d' , saranno quelli e questi le corrispondenti proiezioni di quattro punti nello spazio esistenti nella linea curva proposta. Or si determini il piano che passa per tre di questi punti ad arbitrio, e la retta che congiunge un di essi stessi col quarto: se tal retta incontrerà i piani delle proiezioni $abcd$, $a'b'c'd'$ nelle tracce di un tal piano (e ciò è sufficiente sperimentarlo per una sola di queste tracce), sarà chiaro ch'essa esiste in questo, e quindi che quel quarto punto esisteva co' primi tre in un piano stesso, dal che ne segue che la curva proposta abbia tutti i suoi punti in un piano, e perciò che sia a semplice curvatura. Ma se poi ciò non avviene, la curva proposta sarà a doppia curvatura.

212. *Cor.* Si rileva da quello che in principio di questo Problema sta detto, che una curva a doppia curvatura non possa mai avere per una delle sue proiezioni una retta.

PROP. LXXIV. PROBL.

213. *La tangente una linea curva nello spazio in un punto di essa ha per proiezioni le tangenti le proiezioni di tal curva in que' punti, che sono le proiezioni del proposto.*

Imperocchè il piano proiettante una tal tangente su ciascuno de' piani di proiezione ove esistono le pro-

jezioni della curva proposta deve risultar tangente alla superficie cilindrica retta a tal piano, la quale ha per traccia la proiezione di quella curva. L'onde la traccia di questo piano proiettante dovrà risultare tangente alla traccia di quella superficie cilindrica, o sia alla corrispondente proiezione della curva, in quel punto, ch'è, com'è chiaro, la proiezione del contatto nella curva proposta.

214. Cor. Si vede da ciò chiaramente in qual modo si possa esibir la tangente in un punto di una curva data nello spazio.

215. Scol. E più generalmente se una curva nello spazio sia data per mezzo di due superficie curve date nelle quali esiste, o di cui è l'intersezione, si otterrà la tangente per un punto dato di essa, tirando per questo punto il piano tangente a ciascuna di quelle superficie curve, ch'erano i determinanti della curva proposta, e la tangente cercata sarebbe espressa dall'intersezione di que' due piani tangenti. La qual cosa è facilissima a comprendersi.

E da questo principio si potrà talvolta trarre profitto, per condurre geometricamente la tangente alla proiezione di una curva nello spazio, la quale risulti dall'intersegersi due superficie curve la genesi delle quali sia facile, e facile anche il condurre un piano tangente.

C A P. XII.

RICERCHE GEOMETRICHE SULLA SPIRALE CILINDRICA.



216. Per dare qualche esempio della maniera di risolvere i problemi che possonsi proporre sulle linee curve a doppia curvatura, partendo semplicemente dalla legge del moto del punto che le genera, abbiamo prescelta la spirale cilindrica, ch'è la curva a doppia curvatura più conosciuta presso gli antichi, i quali la impiegavano utilmente nel rettificare la circonferenza del cerchio come si rileva dal Lib. IV. delle Collezioni Matematiche di Pappo Alessandrino, e che in altri importanti e difficili problemi può talvolta con gran vantaggio impiegarsi, come si vedrà in appresso; ed anche perchè essa al presente è di un grandissimo uso nelle arti di costruzione, ed in quelle del disegno. Nel seguente Capitolo intraprenderemo le stesse ricerche per un'altra curva a doppia curvatura immaginata da' moderni, e chiamata da essi *epicicloide sferica*.

PROP. LXXV. TEOR.

217. Nella spirale cilindrica, ogn'arco del cerchio base del cilindro sta a quella parte del lato di questa che dall'estremo dell'arco va fino alla spirale, come la circonferenza di quel cerchio al passo della spirale, cioè sta l'arco $AM : MK$, come la circonferenza $AFM : AC$ (fig. 66).

Imperocchè nel descriversi la spirale cilindrica l'arco circolare AM , e la parte corrispondente MK del lato del cilindro vengono ad essere contemporaneamente descritte, che perciò esse debbono esser proporzionali alle velocità con cui si descrivono. Or queste velocità sono precisamente le stesse con cui contemporaneamente descrivonsi la circonferenza AFM , e il passo AC della spirale, giacchè il moto di rotazione del raggio OA intorno al punto O , e quello progressivo del punto O lungo la OI si suppongono equabili; che perciò tali velocità debbono essere come quella circonferenza alla AC . Adunque in questa ragione starà pure l'arco circolare AM alla parte corrispondente MK del lato del cilindro su cui è descritta la spirale.

218. *Cor. 1.* Quindi gli archi circolari AM , AM' saranno tra loro come le MK , $M'K'$.

219. *Cor. 2.* E se la spirale ADC sia segnata sul cilindro quadrato FC , starà ogn' arco AM alla corrispondente parte MK del lato del cilindro, come la circonferenza di un cerchio al suo diametro.

220. *Scol.* Ciò posto la retta PX (*fig. 70, e 66*) si ponga uguale alla circonferenza del cerchio FMA , e l'altra XY perpendicolare ad essa nel suo estremo X sia quanto il passo AC della spirale cilindrica ADC , congiunta la PY , se prendansi nella PX le PQ , PQ' ec. uguali agli archi AM , AM' , ec., le perpendicolari elevate da questi punti alla PX e prolungate sino alla PY dovranno essere quanto le MK , $M'K'$ ec. Imperocchè pe' triangoli simili PQN , $PQ'N'$, PXY sta $PQ : QN :: PQ' : QN' :: PX : XY$, cioè come la circonferenza del cerchio FMA al passo AC della spirale cilindrica, o sia come $AM : MK$, o come $AM' : M'K'$: che perciò essendosi supposte le PQ , PQ' uguali rispettivamente alle AM , AM' ; dovranno le QN , $Q'N'$ esser quanto

le MK , MK' . E sarà facile, inoltre, il rilevare, che la PY sia quanto la lunghezza dell'intera spirale cilindrica ADC , e che le PN , PN' sieno rispettivamente uguali alle AK , AK' : dal che si rileva che la rettificazione indefinita della spirale cilindrica dipenda dalla rettificazione indefinita della circonferenza del cerchio.

PROP. LXXVI. TEOR.

221. *La spirale cilindrica continuata intersega tutti i lati del cilindro su cui è segnata ad una distanza, ch'è sempre quanto il passo suo.*

Sia $ADCHE$ (fig. 66) una spirale cilindrica continuata, il cui passo sia AC , ed un qualunque lato ST del cilindro $FMAEG$ sul quale essa è descritta la interseghi ne' punti a , c , dovrà la ac essere quanto il passo AC .

Imperocchè s'intenda per lo punto a passare un piano parallelo alla base del cilindro, che segnerà in questo il cerchio fam identico all'altro FMA . Or se il principio del moto del punto che descrive la spirale cilindrica proposta si supponga essere il punto a , e che la legge del moto di questo sia la stessa di quella del punto A , dovrà dal punto a percorrersi lungo il lato ST , e nel tempo che si descriverebbe la spirale $aDCc$ identica all'altra ADC , la ac che sia quanto la AC . Adunque ec.

PROP. LXXVII. TEOR.

222. *La spirale cilindrica incontra tutti i lati del cilindro sotto l'angolo stesso, la cui tangente è quanto il rapporto della circonferenza del cerchio base del cilindro sul quale la spirale è descritta al passo di essa.*

Sia ADC (*fig. 66*) la spirale cilindrica , il cui principio sia il punto A , ed essa incontri in a un qualunque lato SaT del cilindro sul quale è descritta. S'intenda per a condotto un piano parallelo alla base FAM di tal cilindro , ed il cerchio fam identico all' altro FAM sia la sezione che in esso da quello si produce . Or si supponga il cilindro $famAMF$ separato dal restante dell' intero cilindro AG , adattarsi colla sua base FMA sul cerchio fam in modo che il punto A cada in a ; e siccome la legge del moto di un tal punto nel descrivere la spirale non si cambia , ne segue che il punto a si potrà prendere come il principio della stessa spirale che si descriveva dal punto A , la quale solamente varierà , perchè in luogo di terminare in C terminerebbe in c . Adunque l' arco AKa dovrebbe coincidere con un arco uguale della spirale aCc ; che perciò gli angoli in cui inclinasi la spirale ADC a' due lati AC , ST del cilindro su cui è descritta dovranno essere tra loro uguali .

Ciò posto nel principio del moto sia AM un archetto circolare minimo , MK l' altezza contemporaneamente descritta dal punto A col suo moto progressivo , e finalmente AK l' archetto di spirale contermine ; si potrà considerare come rettilineo il triangolo AMK rettangolo in M , e quindi la tangente dell' angolo AKM sarà espressa dal rapporto di $MA : MK$, o sia della circonferenza del cerchio FAM al passo AC della spirale (217).

223. *Scol.* La dimostrazione del precedente Teor. avrebbe potuto egualmente rilevarsi dallo *Scol.* della prop. precedente , mentre da questo si vede , che il triangolo PXY rappresenta lo sviluppo di quella parte della superficie cilindrica AG , ch' è tra la base FAM , e l' elica ADC in esso seguita , e che una tale elica sia per conseguenza su questo sviluppo dinotata

dalla retta PY. Finalmente che nell'ottenersi questo sviluppo non siasi affatto cambiato il sito de' lati del cilindro rispetto alla base ed alla spirale, che perciò essi debbano incontrar questa sullo sviluppo in quelli stessi angoli rispettivamente, in cui l'incontravano sulla superficie cilindrica. Adunque siccome la PY che rappresenta la spirale cilindrica sullo sviluppo PXY incontra tutte le QN, QN' ec. sotto lo stesso angolo, similmente sotto lo stesso angolo quanto PYX doveva incontrarli sulla superficie cilindrica. Ed un tal angolo è chiaro che abbia per tangente il rapporto di PX ad XY, le quali due rette dinotano la circonferenza del cerchio base del cilindro su cui è descritta la spirale, ed il passo di questa.

224. *Cor.* Da questa prop. si rileva che tutte le parti di una stessa spirale interposte tra i lati equidistanti del cilindro sieno identiche, e che questa curva abbia dappertutto una stessa curvatura.

PROP. LXXVIII. PROBL.

225. *Conosciuta la legge del punto che genera una spirale cilindrica sulla superficie di un dato cilindro, costruire la proiezione verticale di una tal curva.*

Sia FBA (fig. 71) il cerchio ch'è la base, e quindi la traccia orizzontale del cilindro proposto, ed il punto A preso nella circonferenza di tal cerchio dinoti il principio della spirale cilindrica, che si descrive da quel punto con tal legge che sia A'c' l'altezza progressiva alla quale esso perverrebbe nel tempo stesso che descriverebbe la circonferenza FMA, cioè sia A'c' quanto il passo della spirale. Si tiri per A il diametro AF, al quale si conduca ovunque nel piano FBA

la parallela LM, e per questa si supponga passare il piano verticale di proiezione. Ciò posto è chiaro che qualunque lato del cilindro, quello, per esempio, che incontra la sua base in R debba esser proiettato verticalmente in una retta $R'r'r'$ perpendicolare alla LM, e che la parte di esso interposta tra il punto R e l'incontro colla spirale debba pareggiare la corrispondente proiezione: finalmente che ogni punto della proiezione della spirale debba esser tanto alto sulla LM, quanto l'è un tal punto sul piano ABE. Or si esponga la retta PX (fig. 70) che sia quanto la circonferenza ARF, e dal suo estremo X gli si elevi la XY uguale al passo intero della spirale: indi si prenda nella PX la quarta parte PQ la quale rappresenterà perciò la lunghezza del quadrante AB; se il punto B si progetti in B' , e che poi vi si prenda al di sopra della LM la $B'b'$ uguale alla perpendicolare QN elevata sulla PX, e fino alla PY, il punto b' rappresenterà la proiezione verticale di quel punto della spirale cilindrica che corrispondeva in proiezione orizzontale all'estremo B del quadrante AB. Similmente dividendo l'arco AB in un dato numero di parti uguali e più piccole che si può, una delle quali sia espressa dalla AR; e la PQ in altre linee, di cui la prima sia PS, proiettando il punto R in R' e poi prendendo al di sopra della LM la $R'r'$ uguale alla ST si avrebbe quel punto della proiezione verticale della spirale cilindrica ch'è in quel lato del cilindro il quale passa per R; e così sempre facendo si verrà a descrivere per punti la proiezione cercata $A'f'c'$.

226. Scol. 1. Si potrebbe anche, allorchè si è descritta di tal proiezione una metà $A'b'f'$, immaginare per f' la retta lm parallela alla LM; ed è chiaro allora, che incominciando a contar la spirale dal punto F, la proiezione di quell'altra metà sua, che vien descritta

contemporaneamente al semicerchio FrA debba incominciare dal punto f' , ed essere identica alla prima $A'r'f'$; ond'è ch'essa potrà descriversi come questa. E le altre successive proiezioni $c'h'$, $h'o'$ si potranno poi descrivere per mezzo del lemma esposto nel n. 188, se prendansi le $r'r''$, $b'b''$ ec. tutte uguali al passo della spirale.

227. *Scol. 2* La curva ch'è la proiezione verticale di una spirale cilindrica, ad imitazione di quelle chiamate dal Leibnitz *linea de' seni*, *linea de' coseni*, e *linea delle tangenti*, la chiameremo *linea de' seniversi*; poichè in essa, prendendosi per asse la $A'F'$, e per principio delle ascisse il punto A' , si ha y : *Arc. senov.* x .

$:: p$: c , e quindi $y = \frac{F}{c} \text{ Arc. senov. } x$, dinotandosi da p il passo della spirale, e da c la circonferenza del cerchio base del cilindro.

PROP. LXXVIII. PROBL.

228. *Tirare la tangente ad una spirale cilindrica data, per un punto di essa di cui n'è data la proiezione orizzontale.*

Abbia un tal punto per proiezione orizzontale il punto d (*fig. 71*), e da questo si abbassi sulla LM la perpendicolare indefinita $bD'd''d'''$ ec., la quale incontri la proiezione verticale della spirale in d' , d'' , d''' ec. saranno i punti d' , d''' , ec., sempre quelli segnati con un numero impari di apici, le proiezioni verticali corrispondenti di altrettanti punti della spirale cilindrica, che avranno per loro proiezione orizzontale lo stesso punto dato d , or che questo si trova nella prima semicirconferenza AdF , e per ognun de' quali si tirerà la tangente alla spirale cilindrica nel modo stesso che adopereremo per condurgliela in quel punto proiettato verticalmente in

d' , e che quindi ha per altezza orizzontale la $d'D'$.

Or poichè la tangente nel punto dato D è tale, che, se si sviluppasse la superficie cilindrica su cui è la spirale, nel piano tangente, coinciderebbe con quella retta che rappresenta lo sviluppo della spirale (223); perciò essa dovrà comprendere col lato del cilindro che passa per D un angolo la cui tangente sia uguale alla circonferenza del cerchio AdF divisa pel passo della spirale, cioè $\equiv \frac{\text{circ. } AdF}{\Delta c'}$. Ma dee di più

la proiezione orizzontale di tal tangente toccare in d questo cerchio, ed esser quindi la dU . Adunque nel triangolo formato dalla tangente cercata, dalla Dd e dalla dU dee stare la Dd alla dU come il passo della spira alla circonferenza AdF . Quindi si avrà il punto d' incontro U di quella tangente il piano orizzontale; e proiettando questo punto U in U' , congiunta la $U'd'$, questa sarebbe la proiezione verticale corrispondente di essa: che perciò una tal tangente sarà data.

229. Cor. 1. È chiaro dalla costruzione del precedente problema, che la dU debba pereggiare l'arco dA . Lo che verificandosi successivamente per ogni altra tangente, ne segue, che il luogo di tutt'i punti ne' quali le tangenti di una spirale cilindrica incontrano il piano del cerchio base del cilindro su cui è descritta, sia un'altra spirale descritta nel piano di questa base dall'estremo di un filo, il quale trovandosi fisso in A , ed avvolto intorno al cerchio $AFdA$, se ne vada mano mano svolgendo nel senso $AdFA$; che perciò una tal curva è, come si vede, la sviluppante di quel cerchio.

230. Cor. 2. La $U'd'$ sarà la tangente nel punto d' la curva $A'd'f'$ ec. Ed ecco in qual modo si potrà geometricamente condurre la tangente in un punto qualunque di questa curva.

PROP. LXXIX. PROBL.

231. *Data una spirale cilindrica tirare ad essa una tangente parallela ad un piano dato.*

Sia AdF (fig. 71) la base del cilindro su cui è segnata la spirale, ed $A'c'$ sia il passo di essa. Siano inoltre zZ' , $Z'z'$ le tracce del piano dato, delle quali la prima si prenda perpendicolare alla LM . Ciò premesso poichè tutte le tangenti della spirale cilindrica formano co' lati di questo solido, che passano pel punto del contatto, lo stesso angolo, la cui tangente è quanto $\frac{c}{p}$; perciò è egli chiaro, che descrivendosi un cono il quale abbia l'asse coincidente con quello del cilindro, ed i cui lati formino con questo l'angolo poc' anzi detto, un tal cono dovrà avere tutti i suoi lati rispettivamente paralleli alle tangenti della spirale suddetta. Or si descriva col centro O , e col raggio OV uguale al quadrante ARB il cerchio VXY , e poi su di esso s'immagini descritto un cono che abbia per proiezioni del vertice i punti O , b' , cioè che sia la sua altezza quanto $\frac{1}{4}p$, sarà esso uno di que'coni. Lo che è facile a comprendersi. Ciò posto per lo vertice di tal cono s'intenda condotto un piano parallelo al dato $zZ'z'$, il quale interseghi la base del cono nella retta XY , e quindi segni in esso due lati proiettati orizzontalmente in OX , OY . È chiaro da quello che si è detto che la tangente cercata avrà luogo in doppio sito della spirale cilindrica, e ch'essa avrà le sue proiezioni orizzontali parallele alle OX , OY . Laonde se al cerchio AdF si tirino le tangenti parallele alle OX , OY , saranno queste le proiezioni orizzontali delle tangenti cercate, e le corrispondenti proiezioni verticali si determineranno come nel Problema precedente.



232. Il Problema dal Viviani proposto agli Analisti de' suoi tempi col titolo di *Enigma geometricum* (*) diede luogo ad Offemburgio di proporre anch'egli il seguente altro analogo: *Forare una volta emisferica con finestre di forma ovale, il perimetro di ciascuna delle quali sia assolutamente rettificabile* (*Atti di Lipsia 1718 pag. 175*); e Giacomo Ermauno occupatosi della soluzione di esso s'imbattè in alcune curve descritte sulla superficie della sfera in una maniera analoga a quella dell'ordinaria epicicloide, che perciò le chiamò *epicicloidi sferiche* (*Atti antichi di Pietroburgo vol. 1 pag. 211*); ed egli le credè dotate della proprietà di esser sempre rettificabili, ond'è che per mezzo di esse pervenivasi agevolmente alla soluzione del problema di Offemburgio. Ma se i Geometri posteriori hanno riconosciuta la debolezza dell'ingegno umano ne' ragionamenti di Ermauno, che conducono alla poc' anzi detta conseguenza fallace; ad un tale errore però dobbiamo la conoscenza di queste nuove curve, la quale è stata non solamente utile pe' progressi ulteriori della

(*) Un tal problema era il seguente: Tra gli antichi monumenti della Grecia vi è un tempio dedicato alla Geometria, il cui piano è circolare, e ch'è sormontato da una volta emisferica forata da quattro finestre uguali, con tal arte, che il rimanente della superficie è geometricamente quadrabile. Si cercava la figura e il sito di tali finestre.

Geometria e dell'Analisi, ma anche per le arti di costruzione. La genesi delle suddette epicloidi è la seguente.

233. *Def.* Un cono retto che abbia per lato il raggio di una sfera, e per vertice il centro di questa, si muova in modo intorno al suo vertice, che il cerchio che n'è base roti sulla circonferenza di un qualunque cerchio descritto sulla superficie della sfera stessa, finchè riadatti sulla circonferenza di questo quello stesso punto della circonferenza della base sua, col quale l'aveva toccata da principio; un tal punto, nell'intero giro del cono, verrà a descrivere sulla superficie della sfera una curva, che si chiamerà *epicloide sferica*.

234. Il cerchio ch'è sulla sfera si dirà *cerchio immobile*; e l'altro, ch'è base del cono, si dirà *cerchio mobile o generatore*.

235. Così sia ADF un cerchio qualunque segnato in una sfera il cui centro è il punto O , ed il cono $ABCO$, che ha il vertice in O , ed il lato OA quant' il raggio di tale sfera, roti intorno ad O in modo che la circonferenza della sua base CBA scorra sopra quella del cerchio ADa ; allorchè il punto A della circonferenza ABC si vede di nuovo adattarsi in a sulla circonferenza del cerchio ADa , si sarà descritta sulla superficie della sfera proposta l'*epicloide sferica* AEa . E l'arco ADa del cerchio immobile, ch'è tra i due estremi A , a dell'*epicloide sferica*, e ch'è quello sul quale si è mossa la circonferenza del cerchio mobile lo diremo *base*.

236. *Cor.* Dalla definizione precedente si rileva, che nell'*epicloide sferica* la circonferenza intera del cerchio mobile debba pareggiar la base dell'*epicloide sferica*, che perciò se il cerchio mobile e l'immobile

fossero stati uguali, l'epicicloide sferica avrebbe avuto il suo termine nel punto stesso ove avea avuto il suo principio; che se il cerchio mobile fosse stato minore dell'immobile, in tal caso la base dell'epicicloide sferica sarebbe un arco di quest'ultimo cerchio. Finalmente supponendo il cerchio mobile maggiore dell'immobile, la base dell'epicicloide verrebbe ad essere maggiore della circonferenza del cerchio immobile; vale a dire che per descriversi l'intera epicicloide sferica in questo caso, dovrebbe il cerchio mobile percorrere più di una volta la circonferenza del cerchio immobile; e quindi l'epicicloide sferica verrebbe ad avere più di un ramo sulla superficie sferica nella quale è descritta.

237. Cor. 2. Se per un punto comune alle circonferenze de' due cerchi mobile ed immobile si tiri la tangente ad una di esse, questa dovrà essere anche tangente all'altra; che perciò i raggi di que' cerchi condotti a tal punto di contatto, essendo perpendicolari a quella tangente, comprenderanno l'angolo d'inclinazione del piano del cerchio mobile a quello dell'immobile, in quel punto, o pure il supplemento di esso. Or un tal angolo è supplemento di quello che comprendono tra loro l'asse del cono, e la congiungente il centro della sfera col centro del cerchio immobile, il quale è costante, che perciò anche costante sarà il primo; vale a dire, che il piano del cerchio generatore dell'epicicloide sferica, s'inclina sempre sotto l'angolo stesso al piano del cerchio immobile.

238. Cor. 3. Che perciò è chiaro, che tutti que' raggi, che dal centro del cerchio mobile si tirano a que' punti ov'esso tocca il cerchio immobile, inclinandosi sotto uno stesso angolo al piano di questo, rappresentino i lati di una superficie cilindrica, la cui base è il cerchio immobile; ed il centro del cerchio mobile per-

correrà, per conseguenza, su questa superficie cilindrica un arco di cerchio uguale e parallelo alla base dell'epicicloide sferica.

239. *Scol.* Il Lexell in una sua Memoria delle epicicloidi sferiche inserita negli *Atti di Pietroburgo* per l'anno 1779. P. I. si occupa ad assegnare l'equazione di tali curve, a far rilevare non esser vero ch'esse sieno generalmente rettificabili, limitandosi questa proprietà al solo caso che il cerchio mobile sia quanto il cerchio massimo della sfera, cioè che il cono il qual s'impiega a descrivere l'epicicloide sferica in una data sfera sia equilatero. Egli inoltre assegna la tangente per un punto qualunque dell'epicicloide sferica, ne determina il raggio di curvatura, quadra alcuni trilinei compresi sulla superficie della sfera tra un arco del cerchio immobile, un arco epicicloidale, e l'arco di cerchio massimo della sfera condotto per gli estremi di quello e di questo. Finalmente esamina le altre curve che descrivonsi da un qualunque punto preso nel piano del cerchio mobile, nel giro ch'esso fa per descrivere l'epicicloide sferica. Or di tutte queste ricerche, che potranno dalla citata Memoria rilevarsi, noi non imprenderebbero qui ad esaminare, perchè confacenti al nostro argomento, che la sola di condurre la tangente all'epicicloide sferica, per un punto dato in essa, avvalendoci però de' soli mezzi che la Geometria ci somministra a tal uopo, e ad essa vi premetteremo l'altra di esibire le proiezioni di un epicicloide descritta su di una data sfera, dati il cerchio mobile e l'immobile, le quali tre cose sono i convenevoli determinanti della forma e del sito di una tal curva. Intanto per porre nelle seguenti ricerche tutto quel rigore che la buona Geometria esige, vi premetteremo i seguenti lemmi.

LEMMA I. PROBLEMATICO

240. *Dividere un arco dato, in data ragione.*

PRIMA MANIERA PER MEZZO DELLA SPIRALE CILINDRICA.

Il cerchio ABF (*fig. 73*) sia la base di un cilindro sul quale vi stia segnata la spirale cilindrica ADC, e concentrico al cerchio ABF vi si ponga quell'altro di cui è parte l'arco dato GHK, e questo si prenda dal punto G ove lo incontra il diametro FA del primo. Sia inoltre $P : Q$ la ragione data secondo la quale bisogna dividere l'arco GK.

Si unisca la OK, la quale incontri la circonferenza della base del cilindro nel punto B, pel quale si tiri il lato BE di quel solido, e questo incontri in L l'elica. Inoltre la BL si divida in N nella ragion data, sicchè stia $BN : NL :: P : Q$, e per N si conduca l'arco di cerchio NM parallelo ad ABF, cioè si seghi il cilindro con un piano che passi per N, e sia parallelo alla base. Finalmente per lo punto M si tiri nel cilindro l'altro lato MR, che incontri in R la circonferenza della base: l'arco AB si sarà diviso in A nella ragion data, cioè starà $AR : RB :: P : Q$.

Imperocchè per la natura dell'elica sta l'arco circolare AB all'altro AR come BL, ad RM (218), e dividendo l'arco AR all'arco RB, come BN ad NL, cioè come $P : Q$. Laonde l'arco AB resta diviso nella data ragione in R, e quindi il suo simile GK dovrà restar similmente diviso in H.

241. Ed una tal costruzione sarà presto effettuata in un piano, quando si abbia la proiezione della spirale cilindrica. In fatti sia ABF (*fig. 74*) la base del cilindro, e sia *adc* la proiezione verticale della spirale

cilindrica segnata su quel cilindro, la qual proiezione si supponga data. Si tiri nel cerchio ABF il diametro AF parallelo alla LM, e dal suo estremo A corrispondente al principio *a* della proiezione dell' elica si prenda l' arco AB simile al proposto a dividersi nella data ragione. Dal punto B si abbassi su di LM la perpendicolare indefinita BB', sarà B'b' la proiezione del lato BL nella *fig. 73*, e *b'* la proiezione del punto L ch'è nell' elica. Or si divida la B'b' in *n'* nella data ragione di P : Q, e per *n'* si conduca la *n's'* parallela alla LM, saranno *n'*, *n's'* ed *s'* le corrispondenti proiezioni del punto N, dell' arco NM, e del punto M nella figura precedente. Quindi abbassandosi dal punto *s'* sulla LM la perpendicolare indefinita s'R'R, che incontri in R la circonferenza del cerchio ABF, sarà s'R' la proiezione verticale del lato RM nella figura 73, ed il punto R dinoterà quello in dove esso incontrava la base del cilindro, o sia quel punto in dove l' arco AB restava diviso nella ragion data.

SECONDA MANIERA PER MEZZO DELLA CICLOIDE GALILAICA.

242. Sia una qualunque semicicloide volgare AED (*fig. 75*), ed intorno al suo asse AC vi sia descritta la metà ABC del cerchio che la genera. Dal punto A su tal semicirconferenza vi si prenda l' arco AB simile al proposto a dividersi nella ragion data, il qual si supponga, per ora, esser non maggiore della semicirconferenza, e per B si tiri la EBI parallela alla CD, e si divida la EB in *b* nella ragion data, in modo che stia $Bb : bE :: P : Q$. Inoltre si prenda la *bi* uguale alla BI, per lo punto *i* si conduca la *cia* parallela ad uguale alla CIA, ed intorno ad essa come diametro si descriva il semicerchio *cba*, che dovrà passare ne-

cessariamente per lo punto b , ed intersegare la semicicloide AFD in un punto F , per lo quale si tiri FG parallela a DC , sarà G quel punto nel quale l'arco AB resta diviso come si cerca.

Imperocchè dalla costruzione e dal n. 189 si rileva, che Bb pareggi GF ; e dalla natura della cicloide volgare AFD è noto, che gli archi circolari AG , AB sieno quanto le rispettive semiordinate GF , BE condotte nella cicloide. Laonde starà $BGA : GA :: BE$ a GF , e dividendo $BG : GA :: Eb : FG$, o bB , cioè come $Q : P$, Adunque ec.

Che se si proponga a dividere un arco del cerchio ABC maggior del semicerchio il qual sia perciò composto dal semicerchio ABC , e da un qualunque altro arco AB . In tal caso, si rileverà facilmente che basterà dividere nella stessa ragione di $P : Q$ sì il semicerchio ABC , che l'arco AGB , il primo in X , e l'altro in G ; sarà $AX + AG$ una delle parti dell'intero arco proposto, e l'altra sarà $XC + GB$.

Ed in fine dalla soluzione precedente si rileva, in qual modo dall'essersi diviso in data ragione un arco del cerchio ABC simile al dato, si pervenga alla stessa divisione per questo.

243. *Scol.* Tra gli altri rimarchevolissimi monumenti della scienza degli antichi Geometri circa la natura de' Problemi, uno indubitato ce n'offre il precedente problema di cui Pappo nel IV. libro delle sue Collezioni Matematiche alla prop. xxxv., dice: *Datum quidem angulum, vel circumferentiam tripartito secare solidum est, ut ante ostendimus, sed datum angulum vel circumferentiam secare in datam proportionem lineare est, et a junioribus demonstratum fuit.* Ed egli poi reca due metodi diversi, che quelli usarono per

risolverlo, avvalendosi in uno della quadratrice di Dinostrato, e nell'altro della spirale Archimedeica. Noi però abbiamo stimato di preferire a queste due curve impiegate dagli antichi, a tal uopo, la spirale cilindrica, e la cicloide volgare, imitando in ciò il Viviani (*); poichè quest'ultima principalmente, per la facilità a potersi descrivere meccanicamente con uno strumento semplicissimo, può offrir gran comodo in pratica, ove abbisogni far uso del precedente problema; e l'altro metodo, oltre al potersi anche convertire in un meccanismo agevole ed ingegnoso, come il Viviani ha fatto rilevare, ci è servito a mostrare qual uso vantaggioso possa farsi della spirale cilindrica nella soluzione di alcuni problemi trascendenti. Finalmente per completare quest'argomento ci riserbiamo a dare altrove, come una convenevole applicazione di altre teorie, che ivi esporremo, un terzo metodo agevole quanto ciascun de' precedenti, per risolvere lo stesso Problema, e che abbiamo anche ricavato dalla citata operetta del Viviani.

LEMMA II. PROBLEMATICO.

244. *Dati due cerchi disuguali, troncar dalle loro circonferenze due archi uguali.*

Sieno AGB, CHD (fig. 76) i due cerchi proposti, ed AGB il maggiore; e dinotino ABG, CDH gli archi uguali presi in essi: è chiaro, che supponendo tali cerchi concentrici, e congiunto il centro comune O coll'estremo G dell'arco preso nel cerchio maggiore, il raggio OG intersecando la circonferenza del cerchio inferiore CHD vi debba segnare l'arco CK simile ad

(*) Veggasi il suo *Diporto Geometrico* verso la fine.

ABG, e minore di questo, e quindi di CH. Or per esser simili gli archi ABG, CDK sono essi come le intiere circonferenze, e quindi come i raggi OA, OC; che perciò starà anche $CDH : CDK :: OA : OC$, e dividendo $HK : CDK :: AC : CO$, la qual ragione è data. Laonde il presente Problema si è ridotto al precedente.

PROP. LXXX. PROBL.

245. *Dati i due cerchi, l'uno immobile, e l'altro che genera l'epicicloide sferica, e di più l'angolo della loro scambievole inclinazione, costruire le proiezioni di una tal epicicloide.*

Prendasi per piano di proiezione orizzontale quello del cerchio immobile dato ABC (*fig. 77*), ed il piano verticale passi per lo centro O di tal cerchio. Dal punto B ove la LM intersega la circonferenza del cerchio immobile si prenda su di questa l'arco BD uguale alla semicirconferenza del cerchio mobile dato (*lem. 2.*), e D per principio dell'epicicloide sferica, sarà B quell'altro punto della base di essa in dove il cerchio mobile tocca l'immobile, allorchè avendo compiuta una semirivoluzione, ha adattato, nell'epicicloide che esso descrive, il punto opposto del diametro che passa per B. Laonde patentemente apparisce, che se al punto B della BM si costituisca nel piano verticale l'angolo MBR uguale a quello in cui inclinasi il cerchio mobile all'immobile, e si prenda su di BR la Bf' uguale al diametro del primo cerchio, il punto f', debba essere, supponendo il piano verticale nel suo vero sito, il vertice dell'epicicloide sferica proposta, e nel tempo stesso la proiezione verticale di tal vertice; e che la

corrispondente proiezione orizzontale di questo punto debba essere l'altro punto F' ove la perpendicolare $f'F'$ alla LM incontri una tal comune sezione.

Or per avere la proiezione di un qualunque altro punto della proposta epicicloide sferica, si supponga il cerchio mobile toccare la base DBE di questa nel punto G , per dove si tiri al cerchio immobile la tangente GH , che rappresenterà la comune sezione de' piani di questi due cerchi. Allorchè il primo di essi si trova in tal luogo; e si supponga esser GKI il cerchio mobile abbattuto sul piano dell'immobile. Si prenda in esso l'arco $GK = GD$ (*lem. 2.*), sarà K il punto che si dovrà trovare nell'epicicloide sferica, allorchè il cerchio mobile tocca la base DBE in G . Or abbassandosi da K sulla GH la perpendicolare KN , è chiaro che allor quando un tal cerchio ritornasse nel suo vero sito, la KN verrebbe a descrivere un piano verticale. Adunque la proiezione orizzontale del punto K dell'epicicloide dovrà cadere nella KN . Per determinarla si prenda sulla BR la $Bx = KN$, che rappresenta perciò, in grandezza, l'ordinata per lo punto K dell'epicicloide, e dal punto x si abbassi la perpendicolare xX' alla LM ; è manifesto che se prendasi nella NK la $Nk = BX'$, il punto k sarebbe la proiezione orizzontale del punto K dell'epicicloide sferica: e siccome l'altezza orizzontale di tal punto è dinotata dalla xX' , così si avrebbe la corrispondente proiezione di esso, abbassando da k sulla LM la perpendicolare $kK'k'$, e prendendovi la $K'k' = X'x$; sarebbe k' una tal proiezione. Laonde così facendo continuamente, si verrà ad assegnare per punti la curva DkF' , nel piano orizzontale, che sarà la proiezione orizzontale della semiepicicloide proposta; e l'altra curva $D'k'f'$; che passerà per tutti gli altri punti k , nel piano verticale, ne sarà la corrispondente pro-

jezione verticale. Ed è poi chiaro, che la proiezione orizzontale della rimanente semiepicicloide sia l'altra curva FPE identica alla DkF' , e che la proiezione verticale di questa sia la stessa $D'k'F'$.

246. *Cor.* Si rileva dalla costruzione del precedente Problema, che avendosi le proiezioni $EF'D$, $D'k'f'$ di un'epicicloide sferica, si avrà immantinente il diametro del cerchio mobile che l'ha generata, congiugnendo il punto medio B della base EBD di essa col punto f' estremo della sua proiezione verticale.

PROP. LXXXI. PROBL.

247. *Date le proiezioni di un punto di una epicicloide sferica data; determinare quel punto della base di essa ove il cerchio mobile che la genera, nel passare per lo punto dato, tocca una tal base.*

Si determini il cerchio generatore (245), ed esso sia quello descritto intorno al diametro PQ (*fig. 78, e 77*); e per lo punto P gli si tiri la tangente PS . Or siano k, k' le proiezioni del punto dato, e quindi $k'K'$ l'altezza di esso sul piano orizzontale; ed una tal retta si applichi nell'angolo RBM perpendicolarmente alla BM , e sia la $X'x$, sarà Bx uguale alla perpendicolare, che dal punto dato si abbassa sulla tangente del cerchio immobile, nel punto ov'esso è nel tempo stesso toccato dal cerchio mobile, e la BX' sarà quanto l'altra perpendicolare che dalla proiezione k di tal punto si abbasserebbe sulla stessa tangente; le quali cose tutte rilevansi dalla costruzione del precedente Problema, cioè supponendo esser G il punto del contatto cercato, GH la tangente un tal cerchio in G , sarebbe $Bx = NK$, e $BX' = Nk$. Ciò posto si prenda sulla PS la Ps uguale

alla Bx , e per s si tiri la sT perpendicolare alla PS , al punto T ove questa perpendicolare incontra il cerchio PQT sarebbe quel punto del cerchio mobile, che deve trovarsi nell'epicicloide proposta proiettato in k, k' ; allorchè un tal cerchio tocca l'immobile coll'altro suo punto P . Laonde questo punto di contatto dovrà cadere in quel punto della base, che dista dal principio dell'epicicloide per un arco del cerchio immobile uguale all'arco PT . Quindi se si prenda dal punto D sulla circonferenza DBE , l'arco DG uguale all'arco PT (244), sarebbe G il punto di contatto cercato.

248. *Cor.* Ed è anche chiaro che congiunta la corda PT questa sarebbe quanto la distanza rettilinea che v'è tra il punto dato, e quello ove il cerchio mobile che passa colla sua circonferenza per esso, tocca l'immobile.

PROP. LXXXII. PROBL.

249. *Per un punto dato nell'epicicloide sferica condurle la tangente.*

Sieno k, k' (*fig. 77*) le proiezioni del punto dato, sarà chiaro che se per questi punti si tirino alle proiezioni $D'E, D'k'f$ di una tal epicicloide le tangenti $k'V, kv$ saranno queste le proiezioni della tangente cercata (213).

ALITER

250. Sieno come poc' anzi k, k' le proiezioni del punto dato, e si determini primieramente il punto G ove il cerchio mobile passante per lo punto dato tocca l'immobile (247), resterà in tal modo anche determinata la corda GK di quello, la quale rappresenta

la distanza tra il suddetto punto di contatto e 'l punto dato (248). Or è egli chiaro, che nello scorrer che fa il cerchio GIK sull'arco DGE, per generar l'epicicloide, si possa concepire senza errore sensibile, che descrivendosi dal punto G un arco minimo le corde che dagli estremi di tal arco vanno a' punti corrispondenti di detta epicicloide, cioè agli estremi corrispondenti dell'archetto epicicloideale, che in tal moto si descrive dal cerchio mobile, sieno concorrenti nello stesso punto G, ed uguali; che perciò quell'archetto epicicloideale si vedrà appartenersi ad una superficie sferica che avrà G per centro, ed il raggio dato GK. Ma dovevasi anche un tal archetto epicicloideale ritrovare, per la natura di questa curva, sulla superficie sferica del raggio OB (233). Adunque esso esisterà nell'intersezione di tali due superficie sferiche: che perciò se pel punto dato si tiri a ciascuna delle suddette superficie sferiche un piano tangente, questi intersegandosi determineranno la tangente dell'epicicloide sferica proposta, nel punto dato in essa.

Ed in questo caso, se si determini il punto v ove tal comune sezione, ossia tal tangente, incontra il piano di proiezione orizzontale, ed un tal punto v si progetti in V sul piano verticale, congiugnendo le vk Vk' sarebbero queste le tangenti in k, k' le curve DKE, $D'k'f$ che rappresentavano le proiezioni della data epicicloide.

C. A. P. XIV.

DI ALCUNI PROBLEMI GEOMETRICI RISOLUTI PER MEZZO
DE' LUOGHI ALLA SUPERFICIE.



251. La teoria delle intersezioni , e quella delle curve a doppia curvatura non è un oggetto di pura speculazione , e valevole solamente nelle arti di costruzione , essa ci offre anzi de' mezzi eleganti da risolvere alcuni problemi trascendenti , pe' quali veruna risorsa non ci dà la Geometria . E gli antichi a' quali mancava la conoscenza di descrivere le curve coniche in un piano , dovettero ricorrere alla combinazione delle superficie coniche in cui tali curve erano segate , per poter per mezzo di esse risolvere quella classe di Problemi , ch' essi perciò chiamarono solidi , come raccogliessi da quel luogo di Pappo , ov' egli dice , parlando di questi tali problemi : *solida appellantur , namque ad constructionem necesse est solidarum figurarum superficiebus , nimirum conicis uti* . Che perciò essi , gelosi della purità geometrica , non vollero ricevere in Geometria le soluzioni di questi Problemi , che parevan loro implicate di meccanismo ; ond' è che Pappo stesso disse parlando del problema delle due medie proporzionali (*) : *Antiqui Geometrae problema antedictum , in duabus rectis lineis , quod natura solidum est , geo-*

(*) *Collez. Matem. lib. III. dopo la Prop. 4.*

metrica ratione innixi construere non potuerunt, quoniam neque conì sectiones facile est in plano designare. E di questi problemi solidi trovansene anche presso gli antichi altre soluzioni fatte colla combinazione di diverse altre superficie curve, come tra poco faremo vedere.

Ma ecco in succinto in quali casi, ed in che modo convien far uso della combinazione de' luoghi alla superficie nella risoluzione de' problemi.

252. Una linea descritta in un piano con una legge costante ha per proprietà sua questa legge stessa del punto che la genera, e tutte quelle altre, che da tal genesi si derivano, cioè, per esprimerni col linguaggio proprio de' Geometri, è il luogo geometrico di tutti que' problemi indeterminati per un grado, cui si appartiene per quesito taluna di quelle proprietà; sicchè a render determinato uno di questi tali problemi non bisognandovi che un' altra condizione sola, e questa contenendosi per proprietà in un' altra simil locale, debbon perciò dalla combinazione di esse risultare que' punti, che soddisfano al quesito di quel problema geometrico determinato, che risulta dall' accoppiamento delle succinate due condizioni. E ciò in più problemi di questo trattato si trova anche manifestamente praticato. Similmente una linea che muovasi nello spazio con una legge costante genera una superficie, che ha per proprietà la legge stessa, che perciò questa proprietà si trova trasportata dalle due alle tre dimensioni, e quindi l' indeterminabilità del luogo di essa trovandosi accresciuta per un grado, vi bisogneranno perciò due altre condizioni appartenentisi ad altre locali, che sieno anche delle superficie, perchè dalla loro combinazione resti risoluto un problema determinato per mezzo di luoghi alla superficie. E ciò chiaramente

te rilevasi anche dal vedere, che combinando insieme due superficie come locali esprimenti due condizioni diverse di un geometrico problema determinato, da tal combinazione non risultino già i punti soddisfacenti al quesito; ma si bene quella linea ch'è il luogo geometrico di essi, di un grado però più determinato che non lo era, quando consideravasi una di quelle due locali separatamente. Adunque ogni ricerca geometrica i cui punti che vi debbon soddisfare debbono ritrovarsi nelle tre dimensioni, ha bisogno di tre condizioni, per essere determinata, e ciascuna di tali condizioni deve appartenersi ad un luogo alla superficie. E di ciò che abbiamo generalmente qui detto se ne vedranno alcuni esempj ne' problemi che or proporremo nel presente Capitolo.

253. Risulta da tutto ciò, che le superficie curve sono un'altra specie di luoghi geometrici nello spazio, indeterminati per due gradi, e ch'essi si adoperano utilmente nella costruzione di quelle geometriche condizioni, che sono anche indeterminate per due gradi.

254. Ed è qui a proposito il far avvertire, che gli antichi Geometri coltivarono anche quest'altra specie di luoghi geometrici, de' quali si avvalsero per la risoluzione di taluni difficili problemi; ma a noi di questi loro studj, che pur dovevano esser ben degni del loro ingegno penetrante, e sapere profondo, nulla è pervenuto, fuor solamente di una notizia tramandataci da Pappo, cioè, ch'Euclide scrisse due libri *de' luoghi alla superficie*, che nel *luogo di Risoluzione* venivan dopo i cinque libri *de' luoghi solidi* composti da Aristeo seniore, e di alcune soluzioni eseguite con la combinazione di questa specie di locali, che lo stesso Pappo ed altri geometri antichi ci hanno conservate, tra le

quali quella di Archita del celebre problema delle due medie proporzionali, che noi più appresso rapporteremo, e ch'è ben degna della sagacia, e del saper geometrico del suo autore. In verità deve non poco dolerci, che i due su mentovati libri di Euclide non ci sieno pervenuti, e molto più che nè tampoco vi sia restata quella notizia del contenuto di essi, che Pappo dovè darne nella Prefazione al Libro VII. delle sue Collezioni Matematiche, come di molte altre opere del luogo risoluto trovasi da lui fatto, il che è stato a' moderni coltivatori della Sintesi di sprone a restituirle. Con tutto ciò però non v'ha dubbio, che l'accortissimo Sig. Montucla siasi ingannato, allorchè ha detto, che gli antichi per questa specie di luoghi intendevano alcune linee a doppia curvatura, o descritte con una determinata legge su di una superficie curva. Imperocchè tali luoghi geometrici, come da Pappo stesso l'apprendiamo, non sono che veri luoghi alla linea. In fatti ecco come egli si esprime parlando de' tre generi in cui gli antichi distinguevano i problemi (*): *Relinquitur tertium genus problematum, quod lineare appellatur; lineae nam aliae praeter jam dictas in constructionem assumuntur, quae varium et difficilem ortum habent, ex inordinatis superficiebus, et motibus implicatis factae. Ejusmodi verò sunt etiam lineae, quae in locis ad superficiem dictis inveniuntur*, ec. Se dunque egli espressamente dice che quelle linee si trovano su i luoghi alla superficie, segno è che per questi luoghi dovevansi intendere delle superficie curve, e non già delle linee descritte in esse. E ciò che in seguito del luogo citato si continua a dire dallo stesso

(*) *Collez. Matemat. dopo la prop. 30 lib. IV.*

ruttore, ci conferma nell'opinione di poc'anzi, che gli antichi molto si fossero occupati de' luoghi alla superficie, e delle linee curve in generale, mentre abbiamo, che di queste ne considerò in gran numero il Geometra Demetrio Alessandrino in un libro perduto che aveva per titolo *De linearibus aggressionibus*, e che Filone Tianeo fece molti sforzi ingegnosi in questo genere, che nè pur ci sono pervenuti. E solamente, il che dee accrescere il nostro dispiacere, per tal perdita, ci ha Pappo lasciato notato, che le considerazioni geometriche di costui versavansi su talune linee curve, *quae multa et admirabilia symptomata continent*; che i Geometri posteriori fecero di esse sì gran conto, che ne scrissero de' lunghi trattati; e che Menelao chiamò una di esse col nome di *ammirabile*. Quanta dottrina abbiamo noi perduta degli antichi, e quanto aveva ben ragione il Newton loro ammiratore, perchè conoscitore del merito sommo, ch' essi avevansi acquistato colle loro geometriche ricerche, di dire, che tutto ciò che a noi è pervenuto del loro sapere non è che un saggio delle loro scoperte. Ignoriamo noi dunque perfettamente un gran numero di loro metodi, e di loro ricerche geometriche principalmente in questo genere. Nè si può intendere su qual fondamento il Montucla abbia sostenuto, che le linee curve considerate da Filone Tianeo (*), erano particolarmente prodotte dall'intersezione di un piano con certe superficie curve dette *πλὴν τῶν ἰσῆς* (*complicatae*), mentre di ciò non se ne trova indicazione, nè traccia alcuna presso gli an-

(*) Mont. *Part. I. Lib. V. p. 319.*

tichi. Ciò che poi fossero tali superficie fu già indicato nell'introduzione alla presente Opera, e di esse sarà trattato nel Capo seguente.

255. Dopo l'incidente discussione della differenza che dovevan fare gli antichi tra i luoghi alla superficie, e le linee curve segnate in esse, al che ci ha obbligato la contraria opinione del Montucla, ritornando al nostro oggetto, conviene avvertire, che que' geometri dopo tanti sforzi per risolvere un problema per mezzo di tali luoghi, nè pur pervenivano alla determinazione del quesito in una maniera così completa, come lo possiamo noi per mezzo dell'ovvia dottrina delle proiezioni, vale a dire riducendo i determinanti del quesito sopra un piano di sito, il che ne rende comoda ed elegante la costruzione di esso; per lo che le loro costruzioni, sebbene eleganti e maravigliose, restavano però nel campo dell'immaginazione, ond'è che il Montucla parlando della soluzione di Archita del problema delle due medie proporzionali, la quale, come si vedrà tra poco, era eseguita coll'intersezione di tre diverse superficie curve, la chiama *intellettuale*. Laonde per questa parte puramente speculativa merita anche di entrare a far parte della buona istituzione geometrica la moderna Geometria di Sito.

PROP. LXXXIII. TEOR.

255. *Descrivere una sfera per quattro punti dati.*

Sieno A, B, C, D i punti dati, e da uno di essi A a ciascuno degli altri tre s'intendano condotte le rette AB, AC, AD. Egli è chiaro che il centro della

sfera cercata dovendo essere equidistante da' punti A, B dovrà essere allogato nel piano ch'è perpendicolare alla AB nel punto medio di essa. Similmente, per esser tal centro equidistante da' punti A, C , dovrà aver per luogo geometrico quel piano perpendicolare alla AC , che passa per lo punto medio di questa. Finalmente, per la stessa ragione di poc'anzi, un tal centro dovrà aver per luogo geometrico quell'altro piano perpendicolare alla AD nel punto medio di essa. Or questi tre piani sono dati di sito, e quindi di sito sono anche date quelle rette in cui uno di essi intersega ciascuno degli altri due (73). Adunque sarà pur dato di sito quel punto ove queste rette s'intersecano (55), ch'è il centro della sfera cercata.

Ciò posto, potendosi i piani di proiezione prendere ad arbitrio, per render più facile la costruzione di questo Problema, prendasi per piano orizzontale quello che passa pe' tre punti dati A, B, C (*fig. 79*), e sia l'altro punto D proiettato in d su di tal piano: congiungansi le AB, AC, BC, Ad , ed a quest'ultima le si tiri nel piano stesso una parallela LM , per la quale si concepisca passare il piano di proiezione verticale; caderanno le proiezioni verticali de' punti A, B, C nella LM in A', B', C' , e quella del punto D caderà in un punto d' della perpendicolare dDd' ad essa LM .

Ciò posto, si bissechino le AB, AC , e da' loro punti medj e, f le si erigano, nel piano ABC , le perpendicolari eg, fg ; saranno queste le tracce orizzontali di due piani verticali perpendicolari ad esse AB, AC ne' loro punti medj: e dovendo il centro della sfera cercata trovarsi nell'intersezione di questi piani, ch'è perpendicolare in g al piano ABC , sarà perciò g la proiezione orizzontale di tal centro.

Or dovendo essere, a cagione della posizione che

si è data al piano verticale, la AD parallela alla sua proiezione verticale $A'd'$; il piano ch'è perpendicolare alla AD nel suo punto medio, lo dovrà essere anche al piano verticale, e passare colla sua traccia pel punto h' medio della $A'd'$; sarà perciò questa traccia dinotata dalla perpendicolare $h'g'$, tirata per h' alla $A'd'$; e dovendo il centro cercato esistere in esso piano, dovrà la proiezione verticale sua cadere nella $h'g'$; sarà dunque questa il punto g' ove la perpendicare $g'G'g'$, da g abbassata sulla LM , incontra essa $h'g'$. Finalmente, essendo Ag , $A'g'$ le proiezioni del raggio della sfera, è chiaro, che se prendasi $G'F'$ uguale alla Ag , congiunta la $g'F'$, sarà questa quanto un tal raggio.

257. *Scol.* È facile a rilevarsi che l'analisi geometrica del precedente problema, adattabile anche all'altro di una sfera che dovesse toccarne quattro altre uguali, sia una modificazione dell'analisi geometrica dell'altro recato nella prop. LXII.

PROP. LXXXIV. PROBL.

258. *Inscrivere una sfera in una piramide triangolare data.*

Prendasi per piano orizzontale la base della piramide data, e fatti passare pe' tre lati di tal base tre piani, che le sieno inclinati ad angoli, ciascuno quanto la metà di quello in cui le sono inclinate le corrispondenti facce di essa piramide; dovrà il centro della sfera cercata esistere, come si può facilmente comprendere, in ognuno di questi piani; che perciò esso si esibirà determinando l'intersezione de' suddetti piani che lo contengono.

Adunque per costruire questo Problema, esigonsi due cose; primieramente si vuol determinare

l'inclinazione di ciascuna faccia della piramide alla base sua; e poi bisogna costruire quel piano che bisseca quest'angolo diedro. Or sebbene queste due cose comprendansi nelle soluzioni de' Problemi recati ne' numeri 70 e 68; esse possonsi non pertanto eseguire più facilmente nel caso presente nella maniera che qua giù ne rapporto.

Sieno a, a' (fig. 80) le proiezioni del vertice della piramide proposta, e BCD la sua base la quale prendasi per piano di proiezione orizzontale. Si abbassi da a su di un lato BC la perpendicolare ah , ed ascissa sulla LM dal punto A' la $A'H'$ uguale alla ah , si unisca la $a'H'$, sarà l'angolo $A'H'a'$ uguale all'altro ahA , cioè all'inclinazione della faccia della piramide, che passa per BC, alla sua base BCD: e se si bissechi l'angolo $A'H'a'$ colla $H'f'$, sarà il punto p' , ove questa $H'f'$ incontra la $A'a'$, la proiezione verticale di quello dove l'altezza Aa della piramide è incontrata dal piano che bisseca l'angolo diedro, che il piano ABC comprende colla base BCD della piramide. Quel tal piano potrà dunque esibirsi pel n. 63. E nel modo stesso si potrà anche esibire ciascuno degli altri due in cui esiste il centro cercato; che perciò questo resterà agevolmente determinato adoperandovi la costruzione della prop. xxv.

PROP. LXXXV. PROBL.

259. *Esibire un punto il quale serbi distanze date da tre altri punti dati nello spazio.*

Questo problema è lo stesso che quello della piramide triangolare esibito nel §. 170., che perciò potrà ad esso recarsi una di quelle stesse due soluzioni che nella citata proposizione furono riportate per questo.

LEMMA

260. *Se sul rettangolo per l'asse di un cilindro retto a base circolare v'insista perpendicolarmente un piano inclinato alla base di tal solido; la sezione che in questo si produrrà da quel piano segante sarà un'ellisse; ed avrà per asse maggiore quella retta in cui questo piano segante incontra quel rettangolo, e l'asse minore quanto il diametro del cerchio base del cilindro.*

Sia ABCD il rettangolo per l'asse nel cilindro retto AKBCD, ed il piano segante inclinato alla base AKB, e perpendicolare al rettangolo ABCD si supponga, per più semplicità, passare per lo punto A, sicchè formi col rettangolo la comune sezione AE. Si prenda in questa un qualsivoglia punto F, dal quale si abbassi sulla AB la perpendicolare FH, e da' punti F, H si elevino le FG, HK perpendicolari al piano ABCD, e sino alla superficie cilindrica: saranno esse parallele ed uguali, ed una di esse la FG rappresenterà la semiordinata per lo punto F nella sezione AGE, l'altra, la semiordinata per lo punto corrispondente H nel semicerchio AKB.

Or poichè $FG = HK = AH$, sarà perciò $GF^2 : AF \times FE :: AH \times HB : AF \times FE$, e quindi in ragion composta di AH ad AF, e di HB ad FE, le quali due ragioni essendo uguali alla stessa di AB:AE, sarà $GF^2 : AFE :: AB^2 : AE^2$. Laonde la curva AGE dovrà essere una semiellisse, ed AB, AE dovranno dinotare due rette proporzionali a' suoi assi. Ma di queste la AE dinota effettivamente l'asse maggiore. Quindi dovrà essere AB quanto l'asse minore. Adunque ec.

261. Cor. Ed è chiaro che il semiasse maggiore stia al minore, come il raggio al coseno dell'angolo in cui il piano segante il cilindro s'inclina al piano della base di questo solido.

PROP. LXXXVI. PROBL.

262. *Esibire un punto nello spazio, date le distanze ch'esso serba da tre rette di sito.*

Il punto cercato dovendo serbar distanze date da tre rette di sito, dovrà avere per luoghi geometrici le tre superficie cilindriche che hanno per assi le tre rette date, e per raggi rispettivi le distanze, che tal punto si suppone serbare da quegli assi. Laonde un tal punto consistendo in queste tre superficie cilindriche, risulterà dal costruire l'intersezione di una di esse con ciascuna delle altre due; poichè allora i punti in cui s'incontrano le suddette due intersezioni saranno quelli che soddisfano al Problema.

Per ciò eseguire, si determinino i punti ne' quali le tre rette date incontrano un'istesso piano di proiezione (50), per esempio, l'orizzontale, e poi preso per centro ciascuno di questi punti, co' semiasse il minore quanto la distanza rispettiva che da ciascuna di esse serba il punto cercato, e l' maggiore quanto la quarta proporzionale in ordine al coseno dell'angolo d'inclinazione orizzontale dell'istessa retta di sito, al raggio, e ad una tal distanza, preso un tal asse sulla proiezione orizzontale di quella retta, si descriva un'ellisse; sarà questa la traccia orizzontale di ciascuna superficie cilindrica, ch'è una delle tre locali del Problema (260 e 261). Se dunque si costruiscano le intersezioni di una di tali superficie con ciascuna

delle altre due (180); que' punti ne quali si taglieranno le proiezioni rispettive di queste due intersezioni, rappresenteranno su ciascuno de' piani di proiezione le proiezioni corrispondenti di que' punti che soddisfano al Problema.

263. *Scol.* In seguito dell' indicazione che qui si è recata della maniera di risolvere il proposto problema, riuscirà facile a chiunque eseguirla graficamente, avvalendosi del metodo proposto nella prop. LXV. per costruire l' intersezione di due superficie cilindriche date. Intanto chi desiderasse veder elegantemente disegnata tal costruzione, la troverà nella Tav. B del supplemento del Sig. Hachette alla Geometria Descrittiva del Monge.

PROP. LXXXVII. PROBL.

264. *Determinare quel punto, che congiunto con tre altri dati sta una delle congiungenti a ciascuna delle altre due in ragioni date.*

C A S O I.

265. Suppongasi primieramente che il punto cercato debba esistere nel piano stesso de' tre dati, B, C, D (fig. 81), e sia esso il punto *a*, e congiunte le *aB*, *aD*, *aC*, sia $aB : aD :: m : n$, ed $aB : aC :: m : r$.

Si divida la BD in E nella ragion data di $m : n$, starà $BE : ED :: Ba : aD$, e quindi la Ea dovrà dividere per metà l' angolo BaD (3. El. VI.). Or al punto *a* della Ea s'intenda costituito l' angolo EaF uguale all' altro aEF , e quindi a' due EaB , EaF presi insieme, ossia ad EaB , EaD : laonde sarà l' angolo BaF uguale all' altro EaB , e perciò saranno simili i

due triangoli DaF , BaF , e quindi sarà Fa , o $FE : aB :: FD : Da$; e permutando $FE : FD :: aB : aD$, cioè $:: m : n$. Laonde se si prolunghi la ED in F sicchè stia $EF : FD :: m : n$, il cerchio aEa' descritto col centro F intervallo FE sarà il luogo geometrico di tutti que' punti che congiunti co' due dati B , D danno le congiungenti aB , aD nella costante ragione di $m : n$.

Similmente se la BC si divida in G , tal che stia $BG : GC :: m : r$, e che poi la GC si prolunghi in H in modo che la ragione di $GH : HC$ sia uguale alla stessa di $m : r$, si vedrà che il cerchio Gaa' descritto col centro H intervallo HG sia il luogo geometrico di tutti quegli altri punti che congiunti co' due B , C danno le congiungenti Ba , aC nella costante ragione di $m : r$. Laonde il punto cercato in questo primo caso del proposto problema sarà uno di que' due a , a' in cui s'intersecano le suddette due locali, cioè le circonferenze di que' due cerchi.

C A S O II.

266. Che se un tal punto debba esser fuori del piano BCD , cioè che debba essere il vertice di una piramide triangolare nella quale sono dati i tre lati della sua base BCD , e gli altri tre che riuniscono nel vertice serbinsi ragioni date. In tal caso si descriva, come poc' anzi, il cerchio Eaa' , ch'è il luogo geometrico di quel punto, nel piano BCD , che congiunto cogli altri due B , D dà $Ba : aD :: m : n$. È chiaro che se tal cerchio s'intenda rivolgersi intorno al raggio EF prolungato, genererà una superficie sferica che sarà il luogo geometrico di tutti que' punti nello spazio, che congiunti co' due dati B , D danno queste congiungenti nella ragione di $m : n$. Similmente

se si esibisca l'altro cerchio Gaa' , ch'è il luogo geometrico di que' punti, nel piano BCD , che congiunti cogli altri dati B , C , danno le Ba , aC nella costante ragione di $m : r$, e che poi un tal cerchio s'intenda rivolgersi intorno al raggio GH prolungato, la superficie sferica che da esso si verrà a generare sarà il luogo geometrico di que' punti nello spazio, ciascun de' quali unendosi co' punti dati B , C , queste congiungenti sono tra loro come $m : r$.

Finalmente se si determini quell' altro cerchio ch'è la locale di tutt' i punti nel piano BCD , ciascun de' quali congiungendosi con punti dati C , D queste congiungenti sono sempre tra loro nella costante ragione di $r : n$, la superficie sferica che da tal cerchio si descrive sarà il luogo geometrico di que' punti dello spazio che hanno la stessa poc' anzi detta condizione. Adunque il punto cercato, cioè il vertice della piramide proposta, dovrà consistere nell' intersezione di queste tre superficie sferiche; ed esso si otterrà facilmente ed in una maniera geometrica nel seguente modo, cioè. Descritti i tre suddetti cerchi, si uniscano i punti ov' essi scambievolmente s' intersecano l' un coll' altro, e dal punto ove tali congiungenti s' intersecano (167) si elevi al piano de' tre punti dati B , C , D , cioè della base della piramide proposta, una perpendicolare, la quale sia uguale alla media proporzionale tra le parti di una stessa di quelle congiungenti; l' altro estremo di questa sarà il punto cercato (169).

267. *Scol.* Le soluzioni recate a' due casi del precedente Problema possono servire anche di rischiaramento e di comprova a quanto fu generalmente detto nel n. 252.

PROP. LXXXVIII. PROBL.

268. *Determinare il vertice di una piramide triangolare, dati i lati della sua base, e gli angoli compresi dalla sua altezza co' lati dell'angolo verticale.*

Dal punto *a* (*fig. 83*) ove l'altezza della proposta piramide supponesi incontrar la base, s'intendano tirate a' vertici degli angoli *B*, *C*, *D* di questa le rette *aB*, *aC*, *aD*; saran dati di specie i triangoli *BaA*, *CaA*, *DaA*, come quelli che, oltre all'angolo retto, hanno un'angolo dato; quindi sarà data la ragione che ciascuna di esse tre rette serba alla *aA* stessa; e per conseguenza quella di una di esse all'altra.

Se dunque s'inclinino da' punti dati *B*, *C*, *D* tre rette che convenghino in uno stesso punto *a*, e sieno in ragion data, si avrà così il punto *a*, cioè il punto ove l'altezza della piramide proposta incontra la base (265); e ritrovando in ordine a' termini della ragione, che una delle tre rette *Ba*, *Ca*, *Da*, la *Ba*, per esempio, serba alla *aA*, ed alla stessa *Ba* una quarta proporzionale, sarà questa l'altezza *Aa*. Si è dunque determinato il sito del vertice della piramide proposta (p. 1x.).

E potrebbe anche esibire l'altezza di tal piramide nel seguente altro modo, cioè. Determinato come poc' anzi il punto *a* (*fig. 80*), ch'è la proiezione del vertice di essa sul piano della base, che prendasi per un di quelli di proiezione, si abbassi da *a* sulla *LM* la perpendicolare indefinita *aA'a'*, e preso sulla stessa *LM* dal punto *A'*, la *A'B'* uguale alla *Ba*, si costituisca al punto *B'* della *B'A'* l'angolo *A'B'a'* uguale al dato *aBA*, nella *fig. 83.*, il quale è complemento dell'angolo *BAA*;

il punto a' sarà l'altra proiezione del vertice della piramide proposta, e la retta $A'a'$ dinoterà l'altezza di essa.

PROP. LXXXIX. PROBL.

269. *Dati in una piramide triangolare i lati della base ed i tre angoli al vertice suo ; costruire un tal vertice .*

Descrivansi su i tre lati BC , CD , BD (*fig. 84*) della base della piramide proposta le tre porzioni di cerchio BGC , CED , BFD le quali sieno capaci di contenere ciascuna rispettivamente uno degli angoli dati, che in essa piramide era l'opposto ad un tal lato della base; e poi si concepiscan queste rivolgersi intorno alle loro corde, genereranno così tre superficie curve, le quali saranno, com'è chiaro, le locali del punto cercato.

Se dunque, presa la base BCD della piramide per piano di proiezione orizzontale, si costruiscano su di essa le proiezioni delle intersezioni di una delle tre superficie curve colle altre due, ciascuna delle intersezioni di queste due curve rappresenterà la proiezione orizzontale del vertice della piramide proposta. E costruendo la proiezione verticale dell'intersezione di due di esse superficie; gl'incontri di una tal curva colla perpendicolare alla comune sezione de' piani di proiezione abbassatale dalla proiezione orizzontale del vertice, già determinata, dinoterà la proiezione verticale dello stesso.

270. *Scol. 1.* L'esecuzione grafica della costruzione indicata nel precedente Problema potrà vedersi eseguita, con eleganza di disegno, nella poc' anzi citata opera del Sig. Hachette.

SCOLIO II.

271. Perchè si possa conoscere la natura del problema recato nella precedente Proposizione, e che di esso possa aversene un' elegante geometrica composizione, recherò qui del medesimo la seguente soluzione analitica, della quale son debitore all' illustre mio collega il Signor Lhuillier di Ginevra; ed indi poi, siccome la soluzione del problema stesso può occorrere in pratica, ove convenga determinare il sito di un punto nello spazio, misurati che s'ensi con uno strumento gli angoli, che le visuali da esso condotte a tre altri punti di sito comprendono tra loro, ne darò un' altra soluzione meccanica; congegnata in quel modo, che gli antichi solevano tenere per taluni Problemi di uso, pe' quali andavano in cerca di risaltamenti *ad manuum operationes maxime accomodatos*, *is qui Architecti esse volunt* (*), come essi esprimevansi, la quale potrà anche servire a' giovani per un esempio di questo metodo, che riuscirà ad essi utile l'adoperare in altri casi.

SOLUZIONE ANALITICA DEL PRECEDENTE PROBLEMA.

172. È manifesto che il precedente Problema è lo

(*) Gli antichi Geometri si sono avvaluti di questo metodo nel risolvere in diverse guise il celebre problema delle due medie proporzionali, come si può vedere nel principio del Lib. I. della Collezione di Pappo, e ne' commenti di Eutacio al Lib. II. de Sphaera et Cilindro di Archimede.

stesso che l'altro di: *Adattare tra i lati di un angolo solido triedro un triangolo dato di grandezza e di specie.* E siccome tutte le sezioni prodotte in un angolo solido da piani paralleli sono simili, ne segue perciò, che facendosi astrazione dalla grandezza, la soluzione del presente problema si possa ridurre all'altra di quello di: *Adattare tra i lati di un angolo solido triedro un triangolo dato di specie*; poichè dopo ottenuta la soluzione di questo, non bisognerà far altro, che: *Trovare in un de' lati di quell'angolo solido un punto, donde condotto un piano parallelo al già tirato, la sezione risulti di data grandezza*; il qual Problema è elementare.

Ciò premesso: sia B (fig 83.) un punto preso ad arbitrio in un lato AB dell'angolo solido A, per dove passa la sezione BCD data di specie. Si dinotino con α, β, γ gli angoli BAC, BAD, CAD; e sia $BC^2: BD^2:: m: n$, e $BD^2: CD^2:: m: p$: i quali rapporti per supposizione sono dati.

Sia inoltre

$$AB=a,$$

$$AC=x,$$

$$AD=y,$$

si avranno le tre seguenti equazioni (n. 77. Trig. Ediz. VII.).

$$BC^2 = AB^2 - AB \times AC \cos. BAC + AC^2 = a^2 - 2ax \cos. \alpha + x^2$$

$$BD^2 = AB^2 - 2AB \times AD \cos. BAD + AD^2 = a^2 - 2ay \cos. \beta + y^2$$

$$CD^2 = AC^2 - 2AC \times AD \cos. CAD + AD^2 = x^2 - 2xy \cos. \gamma + y^2$$

che perciò le tre quantità

$$\left. \begin{aligned} a^2 - 2ax \cos. \alpha + x^2 \\ a^2 - 2ay \cos. \beta + y^2 \\ a^2 - 2xy \cos. \gamma + y^2 \end{aligned} \right\} \text{ sono tra loro come } \left\{ \begin{aligned} m \\ n \\ p \end{aligned} \right.$$

Donde ottengonsi le due equazioni

$$a^2 - 2ax \cos. \alpha = \frac{m}{n} y^2 - \frac{2m}{n} ay \cos. \beta + \frac{m-n}{m} a^2$$

$$a^2 - 2xy \cos. \gamma = \frac{pa \cos. \alpha - my \cos. \gamma}{p-m} = \frac{my^2 - pa^2}{p-m}$$

che sono a due curve coniche, e dalle quali se ne potranno con le ovvie trasformazioni ottenere due altre, e di queste una al cerchio; sicchè dalla convenevole combinazione di esse resterà geometricamente composto il presente Problema, che si vede esser di natura solido, e del quarto grado. Ma intorno alla speciosa natura di tal Problema, è di bene consultare la nota in fine del presente Trattato; ed anche la memoria sul medesimo del sig. Lhuillier diretta alla Reale Accademia delle Scienze di Napoli, e che trovasi inserita nel vol. II. degli Atti di questa, che sta stampandosi, e la continuazione da me aggiunta alla medesima.

273. L'insigne analista Signor Lagrange, in una sua Memoria sulle piramidi triangolari (*) per le vie dell'analisi moderna, e servendosi del minor numero possibile di principj di Geometria, impegna a risolvere diversi problemi su tali piramidi, ch'egli si duole, che sieno state da Geometri meno considerate di quello che

(*) Atti Nuovi di Berlino, an. 1777.

determinate, esprimere in parti della stessa scala i lati della piramide proposta, cioè le tre visuali che dal punto cercato vanno a' tre punti di sito.

Ciò premesso, se dal vertice A si abbassino sulle basi bc , dc due triangoli dati bAc , cAd le perpendicolari Ae , Af , e poi da' punti e , f si elevino sulle stesse, nel piano bcd , le perpendicolari ea , fa ; congiunta la Aa , sarà questa, come facilmente si comprende, l'altezza della piramide $Abdc$ determinata di grandezza e di sito, dalla quale sarà facile il ricavare, per mezzo della scala stabilita, la grandezza e 'l sito di quella della piramide proposta, cioè la posizione del punto cercato.

PROP. XC. PROBL.

277. *Dividere una piramide triangolare in quattro altre piramidi triangolari le quali abbiano per basi le facce delle piramide data, e per vertice uno stesso punto dentro di questa, e tali che serbinsi tra loro rispettivamente ragioni date.*

ANALISI GEOMETRICA.

Sia a (*fig. 83*) quel punto dentro la piramide triangolare data $BCDA$, per lo quale conducendosi de' piani che passino anche pe' lati BC , CD , DB , DA , AC , AB di essa, resti tal solido diviso nelle quattro piramidi cercate $BCAa$, $CDAa$, $BDAa$, $BCDa$.

E poichè è data la ragione della piramide $BCAa$ all'altra $CDAa$, ch' esprimasi per quella delle rette m , n ; ed è di più data la ragione delle loro basi BAC , CAD date, che si dinoti colle rette r , n ; sarà data anche la ragione delle loro altezze, cioè delle perpendicolari abbassate del punto a su i piani BAC ,

CAD; ed essa verrà espressa, com'è chiaro, da quella di $m : r$.

E similmente si vedrà esser data la ragione di ciascuna di queste perpendicolari alle altre che dal punto stesso a si abbassano sugli altri piani BAD, BCD. Laonde il proposto problema si sarà ridotto all'altro di rinvenir nella piramide data un punto a dal quale abbassando le perpendicolari sulle facce della piramide data, queste sieno tra loro in ragioni date.

Or dunque dovendo essere le perpendicolari che si abbassano da tal punto su i tre piani BCD, BCA, ACD in ragioni date, il punto donde esse debbon partire dovrà aver per luogo geometrico una retta di sito determinabile pel n. 164. Ma perchè sono anche date le ragioni che serbansi tra loro le perpendicolari che da un punto stesso debbono cadere su i tre piani BCD, CAD, DAB, tal punto deve aver per suo luogo geometrico un'altra retta di sito determinabile pel numero stesso. Adunque il punto soddisfacente al problema proposto sarà quello ove tali due locali s'intersecano: ed esse dovranno necessariamente intersecarsi, perchè ciascuna deve necessariamente cadere in quel piano ch'è il luogo geometrico de' punti donde abbassandosi le perpendicolari su i piani BCD, CAD sono queste in data ragione. Adunque un tal punto si sarà rinvenuto. Ed il problema proposto potrà agevolmente comporsi.

278. *Scol.* La stessa soluzione avrebbe avuto luogo se il problema fosse stato più generalmente enunciato nel seguente modo, cioè

Dati quattro rettilinei in diversi piani, che s'incontrano; determinare quel punto, che preso per vertice di quattro piramidi aventi per basi questi rettilinei, abbiano queste tra loro ragioni date.

PROP. XCI. PROBL.

279. *Tra due rette date ritrovar due medie proporzionali.*

METODO DI ARCHITA.

Sulla maggiore delle due rette date AB (*fig. 86*) si descriva il semicerchio AEB, e su di esso s'intenda eretto il semicilindro AEBIKL; poi sulla AB stessa e nel piano del rettangolo LABI si descriva l'altro semicerchio AGB, il qual si concepisca rivolgersi intorno al punto B, restando sempre verticale, e finche la AB descriva un quarto di cerchio; genererà esso una superficie di rivoluzione, la quale intersegandosi colla superficie del semicilindro produca in questa la curva AOB. Inoltre la minore delle rette date si adatti dal punto B nel semicerchio AEB, e sia la BE; poi dall'estremo E si abbassi sul diametro AB la perpendicolare EF, ed il triangolo EFB s'intenda rivolgersi intorno al cateto FB per generare un cono, la cui superficie indefinita interseghi quella del semicilindro nella curva ECH, e questa s'interseghi coll'altra AOB nel punto C. Ciò posto si abbassi da C sul piano sottoposto AEB la perpendicolare CD, che dovrà cadere nella superficie cilindrica, ed incontrar perciò la circonferenza del cerchio che n'è base in D; congiunte le BD, BC, saranno queste le due medie proporzionali cercate. Imperocchè la BC incontri in M la circonferenza della base del cono suddetto, e dal punto M sul piano sottoposto AEB si abbassi la perpendicolare MN, la quale dovrà, com'è chiaro, cadere nella BD;

poi si prolunghi la EF in *e*, finchè Fe sia uguale ad FE, sarà Ee il diametro del cerchio base del cono descritto dal triangolo EFB, ed il punto *e* verrebbe a cadere nell'altra semicirconferenza del cerchio AEB. Adunque sarà $MN^2 = ENe = DNB$; e perciò se congiungasi la DM il triangolo DMB sarà rettangolo in M. Ma producendo BD in *a* finchè sia $Ba = BA$, e congiungendo la *a*C, è chiaro che il semicerchio verticale descritto su di *a*B debba passare per C, e perciò essere anche retto l'angolo *a*CB. Adunque i tre triangoli *a*CB, DCB, DMB essendo rettangoli, ed avendo di più comune l'angolo CB*a*, saranno simili: laonde sarà *a*B, o AB: BC :: BC: BD :: BD: BM, o BE; e perciò le EC, BD saranno le due medie proporzionali cercate.

280. *Scol.* Per la composizione di questo Problema si richiede dunque di costruire l'intersezione della superficie del semicilindro con quella del solido di rivoluzione descritto dal semicerchio BGA; e poi l'intersezione della superficie dello stesso semicilindro con quella del cono descritto dal triangolo EFB; dall'intersezione di queste curve ne risulta il punto C, e quindi l'altro D che soddisfano al Problema. Or la prima di queste intersezioni ha evidentemente per proiezione sul piano AEB (fig. 87) la semicirconferenza AEB, e l'altra proiezione di essa sul piano ABIL, preso come piano di proiezione verticale, si otterrà facilmente se per lo punto B si conducano in tal semicerchio le infinite corde BD, BE, ec., e poi per ciascuna di esse, la BD, per esempio, si abbassi da D sul diametro AB la perpendicolare D*d*, la quale si produca al di sopra nel piano ABIL, finchè la parte prodotta *dc* pareggi l'ordinata che nel punto D corrisponde nel semicerchio descritto sopra *a*B: l'estremo *c* di tal perpendicolare sarebbe la proiezione verticale, che si cor-

risponderebbe a quel punto della curva ch'è proiettato in D sul piano orizzontale. E così di ogn' altro.

Per costruir poi l' intersezione della superficie conica con quella del cilindro, cioè per determinare la proiezione verticale di questa, giacchè l' orizzontale cade anche nella semicirconferenza ADB : si determinerà la proiezione verticale di quel punto di essa, ch'è proiettato in D sul piano orizzontale, congiungendo la BD , ed immaginando condotto per essa un piano verticale; questo intersegherà il cilindro ne' suoi lati che passano per B , D , e del secondo de' quali si avrà la proiezione abbassando da D su di AB la perpendicolare indefinita Ddd' . La superficie conica poi verrà dallo stesso piano intersegata in un suo lato, la cui proiezione verticale si otterrà prendendo sulla EF prolungata la Fa' uguale alla semiordinata che nel punto N , ove la BD intersega la EF , corrisponde nel semicerchio base del cono; sarà Ba' la proiezione verticale di un tal lato del cono: ed il punto c ove la retta Ba' intersega l'altra dd' sarà la proiezione verticale di quel punto di questa seconda linea d' intersezione il quale aveva per proiezione orizzontale il punto D . E così facendo si verrà ad assegnare l' intera proiezione verticale Fch di questa. Ed in tal modo la soluzione di Archita verrà ad avere un' effettiva composizione geometrica.

C A P. XV.

DELLE SUPERFICIE PLECTOIDI.



281. *Def. XVIII.* Se una retta si vada movendo nello spazio, radendo una data curva con una legge costante dalla quale però non risulti ch' essa debba passare per un dato punto, o essere costantemente parallela ad una retta di sito, e nè anche che tutti i punti di essa descrivano periferie di cerchi intorno ad un medesimo asse; la superficie che descriverà la chiameremo *Plectoide* cioè *complicata*, e ciò seguendo gli antichi.

282. Tal è per esempio la superficie curva che nel n. 206 si descrive dal raggio del cerchio che muovesi con doppio moto, cioè progressivo lungo l'asse del cilindro, e di rotazione intorno all'asse stesso: e tale è anche l'altra superficie che vien formata dalle infinite tangenti che si conducono alla spirale cilindrica, e che può concepirsi generata da una retta che si muova radendo l'evolvente del cerchio base del cilindro ov'è descritta la spirale; è toccando continuamente questa curva; e perciò formando sempre uno stesso angolo col corrispondente lato di quel cilindro (229).

283. *Scol.* È facile il ravvisare, che per due siti prossimissimi in cui si ritrovi la retta generatrice di una superficie plectoide, non possa mai passarvi un piano.

PROP. XCII. PROBL.

284. *I determinanti del sito di una superficie plectoide , sono le due sue tracce su i piani di proiezione , e le proiezioni di una qualunque altra linea segnata in essa .*

Imperocchè sieno akb , $a'k'b'$ (fig. 88) le due tracce di una superficie plectoide , chd , $c'h'd'$ le proiezioni di un' altra linea ch'è in essa ; e prendasi in $a'k'b'$ un punto qualunque k' , col quale , come vertice , s' intenda descritta una superficie conica , che abbia per direttrice del suo lato la curva akb ; sarà tal superficie conica data di sito (113) . Similmente collo stesso vertice k' , e prendendo per direttrice quella linea , ch'è projetata in chd , $c'h'd'$ si concepisca descritta un' altra superficie conica , sarà questa anche data di sito ; e ne sarà di più data la traccia sul piano stesso della akb , che sia la curva ekf (114) . Or queste due superficie coniche , avendo lo stesso vertice k' si dovranno intersegare in un loro lato , che sarà precisamente quello che passa per lo punto k ove intersegansi le loro tracce akb , ekf ; che perciò siffatto lato di esse , che , come si vede , è anche il lato corrispondente della proposta superficie plectoide , sarà dato di sito . E collo stesso artificio potendosi mano mano assegnare tutti gli altri lati di una tal superficie plectoide , ne segue ch'essa sia anche data di sito .

285. *Scol.* Per comodità della determinazione del precedente teorema , si sono presi per determinanti del sito di una superficie plectoide le sue tracce co' due piani di proiezione , ed una qualunque linea segnata in essa ; ma ciascuno facilmente da se rileva , che tali

determinanti potevano essere tre curve ad arbitrio segnate in essa, e le quali fossero date per mezzo delle loro proiezioni. Inoltre conviene anche avvertire, che que' determinanti generali, cioè convenienti a quest'intera famiglia di superficie curve, possono restar diversamente modificati, il che rende talvolta più comoda la geometrica esibizione, o più facile il concetto di alcune di tali superficie. Ed in fatti, perchè di buon ora ciò cominci ad intendersi, si rifletta, che nella superficie definita al n. 206 basta conoscere la sola proiezione della spira, perchè sia data la superficie ivi descritta. Imperocchè è noto della genesi sua, che ogni lato di essa deve appoggiarsi costantemente sull'asse del cilindro su cui è segnata la spira, ed esser parallelo alla base di questo, le quali condizioni sono sufficienti a dare il sito di ciascun lato di quella superficie, come ben si vede. Ed è anche chiaro, che dall'esser data la sola proiezione della spirale cilindrica, sia anche data quell'altra superficie plectoide, di cui si è detto nel numero 282; poichè ogni lato di essa ha per proiezioni le tangenti le proiezioni rispettive della spirale in que' punti, che sono le proiezioni corrispondenti di quelli ov'essa è toccata da tal lato. E lo stesso si potrebbe anche mostrare di altre superficie plectoidi la natura delle quali siasi specialmente definita.

286. *Scol.* Quelle tre linee nello spazio sulle quali si appoggiano i lati di una superficie plectoide, e che diventano i determinanti di questa allorchè esse sono date per mezzo delle loro proiezioni, in appresso le chiameremo *direttrici de' lati*.

PROP. XCHI. TEOR.

287. *Se le tre direttrici de' lati di una superficie plectoide sieno tre rette , per determinanti di una tal superficie si potranno prendere tre de' suoi lati ad arbitrio :*

Sieno AB , CD , EF (*fig. 89*) le tre rette , che rappresentano le direttrici della proposta superficie plectoide , ed ab , cd , ef tre suoi lati ad arbitrio , e di essi il lato cd interseghi la direttrice CD in O . Ciò posto si prenda nella AB un qualunque altro punto P pel quale corrisponda su tal superficie il lato XY ; esisterà questo lato nel piano PCD , cioè condotto per lo punto P , e per la retta CD . Che se al contrario si supponga preso nella ab un qualunque altro punto p pel quale si supponga passare la retta xy che si appoggi sulle tre altre ab , cd , ef prese come direttrici : egli è chiaro che tal retta esisterà nel piano condotto per lo punto p , e per la cd . Or questi due piani PCO , e pcO debbono necessariamente interse- garsi , poichè hanno di comune il punto O . Laonde si dovranno anche intersegare in qualche punto z le rette XY , xy che sono in essi , e dalle quali essi si concepiscono descriversi . E dimostrando similmente che ogni altro lato della superficie plectoide descritta colle direttrici AB , CD , EF s' interseghi con qualsivoglia altro di quella descritta colle direttrici ab , cd , ef , ne segue che queste due superficie plectoidi abbiano comuni tutti i loro punti , cioè che coincidano ; o quindi che in realtà non ne rappresentino che una sola . Adunque tanto sarà il descrivere la superficie plectoide colle direttrici AB , CD , EF , quanto colle altre ab ,

ed, ef; che perciò queste tre rette al pari che le proposte si potranno prendere per determinanti della data superficie plectoide C. B. D.

288. *Cor.* Da ciò si rileva che per ogni punto di una superficie plectoide le cui tre direttrici sieno linee rette vi passano due rette giacenti su di essa, la prima delle quali si appoggia sulle tre direttrici date, e la seconda su tre lati qualunque della stessa superficie.

289. *Scol.* Questa verità, che, come or ora si vedrà, è fondamentale per le ricerche da stabilirsi sulle superficie plectoidi in generale, non è sì intuitiva, come l'hanno creduta i Geometri descrittivi Francesi, da potersi lasciar senza dimostrazione.

PROP. XCIV. PROBL.

290. *Construire una superficie plectoide di cui almeno una delle tre direttrici sia una linea retta perpendicolare ad uno de' piani di proiezione.*

Dinoti *a* (*fig. 90*) la proiezione orizzontale di quella direttrice rettilinea ch'è perpendicolare al piano orizzontale, e siane *A'a'* la corrispondente proiezione verticale. Sieno inoltre *ed*, *c'd'* le proiezioni di un'altra delle direttrici della superficie plectoide proposta a costruirsi, ed *ef*, *e'f'* quelle della rimanente. Finalmente sia *p* la proiezione data di un punto ch'è in essa superficie, del quale si cerca l'altra proiezione, ed essa si supponga primieramente esser data su quel piano stesso cui è perpendicolare la direttrice rettilinea della superficie proposta, cioè sia l'orizzontale. È chiaro, che quel lato della superficie proposta, il quale passa per un tal punto debba esistere in un piano verticale, la cui

traccia, ed insieme la proiezione di tal lato sarà la ap , ed i punti q, r ove questa retta incontrerà le proiezioni corrispondenti ed, ef delle altre due direttrici, saranno le proiezioni di que' punti ove tali direttrici incontravano quel piano stesso. Laonde se questi punti q, r si proiettino in q', r' sul piano di proiezione verticale, la $r'q'$ dinoterà la proiezione verticale del lato suddetto; che perciò proiettandosi il punto p in p' sulla $r'q'$, si sarà soddisfatto al quesito.

Che se la proiezione data fosse stato il punto p' (fig. 91) sul piano verticale; in tal caso si conduca per p' la lm parallela alla LM , e per essa lm s'intenda passare un piano orizzontale; intersegherà questo la superficie plectoide data in una linea nella quale dovrà essere allogato il punto proposto. Ciò premesso si conduca per a una qualunque retta aki la quale interseghi la ef in k , e la ed in i ; dinoterà una tal retta la proiezione orizzontale di un qualunque lato della superficie plectoide data; e proiettando i punti k, i in k', i' sulle ef, ed sarà la $k'i'$ la corrispondente proiezione verticale del lato stesso. Finalmente il punto n' ove la $k'i'$ intersega la lm dinoterà la proiezione verticale del punto d incontro di questo lato col piano orizzontale condotto per la lm ; ed abbassandosi da n' sulla LM la perpendicolare indefinita $n'N'n$ l'altro punto n ove questa intersegherà la aki sarà la corrispondente proiezione orizzontale del punto stesso, cioè un punto della curva d'intersezione da costruirsi. E così continuando a fare si verrà a descrivere per punti la proiezione orizzontale di tale intersezione, mentre la corrispondente proiezione verticale cade nella lm . Laonde abbassandosi dal punto p' sulla LM la perpendicolare $p'P'$, e prolungandola sino ad incontrare in p la linea ch'esprime sul piano orizzontale la poco fa detta

proiezione, sarebbe p la proiezione orizzontale del punto da prima proposto. C. B. F.

291. *Cor.* Si vede anche dalla precedente soluzione, in qual modo si possa costruire l'intersezione di una superficie plectoide che abbia per sue direttrici tre linee rette, con un piano perpendicolare ad una di queste. E non sarebbe difficile il poter estendere tal soluzione ad un piano che l'intersegasse comunque.

PROP. XCV. TEOR.

292. *Costruire una superficie plectoide le cui direttrici sieno tre curve qualunque.*

Per la proiezione data si conduca nel piano di essa una qualunque retta, per la quale si concepisca condotto un piano perpendicolare a quello ov' è tal proiezione; intersegherà questo la superficie plectoide data in una linea nella quale sarà allogato quel punto di cui n'è data una proiezione, e si cerca l'altra.

Or per costruire la proiezione di una tal linea d'intersezione sull'altro de' piani dati di proiezione, bisognerà determinare su questo le proiezioni di que' punti in dove i lati della superficie proposta incontrano quel piano di sito; la linea condotta per queste proiezioni rappresenterà la proiezione cercata dell'intersezione suddetta. Finalmente abbassandosi dalla proiezione data del punto che si supposeva essere nella superficie plectoide una perpendicolare indefinita sulla comune sezione de' piani di proiezione; l'incontro di questa colla precedentemente esibita proiezione della curva d'intersezione, sarà l'altra proiezione di quel punto. Che perciò si sarà soddisfatto al Problema.

293. *Cor.* Dalla soluzione del precedente Proble-

ma si rileva in qual modo si costruisca l'intersezione di una superficie plectoide qualunque con un piano di sito perpendicolare ad uno di quelli di proiezione. E lo stesso metodo si adoprerebbe se tal piano segante esistesse comunque per rapporto a' piani di proiezione.

PROP. XCVI. PROBL.

294. *Dato un punto in una superficie plectoide che abbia per direttrici tre rette date, condurle per esso un piano tangente.*

Le rette AB , CD , EF (fig. 89) sieno le tre direttrici date, e dinoti Z il punto dato, pel quale deve condursi un piano tangente la superficie proposta. Si assegnino tre lati qualunque ab , cd , ef di una tal superficie, ed indi si determinino i due lati XY , xy di essa che passano per lo punto Z , ed il primo de' quali poggia sulle direttrici date AB , CD , EF , l'altro sulle ab , cd , ef . Il piano tangente cercato sarà quello che vien determinato dalle ZY , Zy .

Imperocchè queste due rette esistendo entrambe sulla proposta superficie plectoide (288) ed intersegandosi in Z possono dinotare due sezioni fatte in tal superficie da due piani seganti che passano per lo contatto. Ed esse sono nel tempo stesso le tangenti di tali intersezioni nel punto stesso. Adunque il piano condotto per esse sarà il piano tangente cercato (124).

295. *Scol.* Se si prenda in XY un qualunque altro punto z pel quale s'intenda passare quell'altro lato xy della superficie plectoide data, il qual si appoggia sulle seconde direttrici ab , cd , ef ; sarà chiaro che quell'altro piano che passa per le XY , xy debba toccare in z la stessa superficie plectoide. Adunque sarà

vero, che infiniti piani tangenti toccano la superficie plectoide proposta lungo un lato di essa.

Or siccome i lati Zy , xy sono in diversi piani colla ZY ; perciò è chiaro che quel piano che passa per le ZY , Zy debba intersegare tutti gli altri lati come xy della superficie plectoide in que' punti ne' quali essi s' incontrano colla retta XY , per la quale passa quel piano. E similmente potrà rilevarsi che un tal piano debba intersegare tutti gli altri lati della superficie plectoide come cd , ab , ec in que' punti ne' quali essi incontrano la xy . Adunque è chiaro da ciò che quel piano che tocca la superficie plectoide proposta nel punto Z la deve intersegare in tutto il resto del corso delle XY , xy , che sono le direttrici di tal piano tangente.

PROP. XCVII. PROBL.

296. Tirare un piano tangente una qualunque superficie plectoide, per un punto dato in essa.

Sieno MEN , $M'E'N'$, $M''E''N''$ (fig. 92) le tre curve che dirigono il moto della retta mobile la quale genera la superficie plectoide proposta, e Z sia il punto dato in essa. Si costruisca quel lato di tal superficie, che passa per lo punto Z , ed esso sia $EE'E''$; poi pe' punti E , E' , E'' ove un tal lato incontra le tre direttrici date MEN , $M'E'N'$, $M''E''N''$ si conducano a queste le tangenti ET , $E'T'$, $E''T''$.

Ciò posto si concepisca un'altra superficie plectoide che abbia per direttrici queste tre tangenti; è facile il comprendere che questa e la proposta abbiano di comune l'elemento $EE'E''$ nel quale si toccano, che perciò il piano che tocca l'una in un punto di tal elemento comune, dovrà toccare, nel punto ste-

so, anche l'altra. Adunque la presente ricerca si sarà ridotta all'altra già risolta nel precedente Problema, cioè a condurre per Z un piano tangente quella superficie plectoide che ha per direttrici le tre linee rette date ET , $E'T'$, $E''T''$.

297. *Scol.* Si è veduto nel n. 295. che la superficie plectoide, la quale ha per direttrici de' suoi lati le tre linee rette ET , $E'T'$, $E''T''$ può esser toccata da un piano che passa per la EE'' negl'infiniti punti di questa linea retta. Laonde la proposta superficie plectoide generale, cioè quella che ha per direttrici de' suoi lati le tre curve MEN , $M'E'N'$, $M''E''N''$ potrà similmente esser toccata da un piano che passi pel suo lato EE'' negli infiniti punti di tal linea retta. Or si prendano in questo lato EE'' i tre punti E , E' , E'' ad arbitrio, e si determinino que' tre piani che passano per siffatto lato, e toccano la proposta superficie plectoide, il primo in E l'altro in E' , ed il terzo in E'' , è chiaro che conducendosi per questi punti in ciascuno di que' piani tangenti una linea retta, tali linee rette potranno dinotare le direttrici di una superficie plectoide tangente la proposta nel lato $EE'E''$. E siccome quelle tre linee rette in que' piani rispettivi possonsi condurre ad arbitrio, così è chiaro che vi saranno infinite superficie plectoidi a direttrici rettilinee, che toccheranno la stessa superficie plectoide generale proposta lungo il suo lato $EE'E''$; e ciascuna di esse dovendo avere per ogni punto della EE'' un piano tangente, che lo sia anche della superficie plectoide generale, ne segue perciò, che a questa gli debbano corrispondere per ogni punto di essa infiniti piani tangenti diversi.

PROP. XCVIII. PROBL.

298. *Data una superficie plectoide, ed un piano che passa per un suo lato; determinare quel punto di questo in dove essa è toccata da quel piano.*

Sieno MEN , $M'E'N'$, $M''E''N''$ (fig. 92) le tre direttrici de' lati della proposta superficie plectoide, ed $EE'E''$ sia quello tra questi pel quale passa il dato piano. Per gli punti E , E' , E'' dove il lato $EE'E''$ incontra quelle direttrici, si conducano ad esse rispettivamente le tangenti ET , $E'T'$; $E''T''$, e con queste per direttrici s'intenda descritta l'altra superficie plectoide che ha di comune colla proposta il lato $EE'E''$, ed alla quale dee essere anche tangente il piano dato, in quel punto stesso dove tocca la prima. Or un tal piano incontri due lati $FF'F''$, $GG'G''$ della superficie plectoide poc' anzi descritta, presi ad arbitrio, ne' punti Y , X , sarà la linea retta XY anche un lato della seconda delle anzidette superficie plectoidi, prendendo per direttrici di essa i tre suoi lati $EE'E''$, $FF'F''$, $GG'G''$; e perciò il punto Z ove tal linea retta ZY incontra l'altra $EE'E''$ dovrà dinotare il punto di contatto del piano proposto colla superficie plectoide, che ha per direttrici le tre linee rette ET , $E'T'$, $E''T''$ (294), e quindi colla data (296).

PROP. XCIX. PROBL.

299. *Costruire la curva di contatto di una superficie conica, che abbia per vertice un dato punto, con una qualunque superficie plectoide data.*

Per lo punto dato, e per ciascun lato della superficie plectoide proposta si faccia passare un piano, e si

determini il punto dove questo tocca quella superficie (298); la congiungente un tal punto col dato rappresenterà un lato del cono tangente richiesto; che perciò la curva che passerà per tutti i punti di contatto così determinati sarà la curva cercata.

PROP. C. PROBL.

300. *Costruire la curva di contatto di una qualunque superficie plectoide data con una superficie cilindrica, la cui generatrice sia parallela ad una data linea retta.*

Per gli lati della superficie plectoide si facciano passare de' piani paralleli alla linea retta data (89); questi piani toccheranno tal superficie ciascuno in un punto (297), per lo quale se tirisi una parallela alla stessa linea retta, questa parallela rappresenterà un lato della richiesta superficie cilindrica. Laonde la curva cercata sarà quella che passa per tutti que' punti di contatto, che si sono in tal modo determinati.

PROP. CI. PROBL.

301. *Condurre per una linea retta di sito un piano tangente una data superficie plectoide.*

Si costruisca quella superficie cilindrica tangente la proposta superficie plectoide, e che ha ciascun suo lato parallelo alla linea retta data (300); il piano tangente cercato sarà quello che si conduce a questa superficie cilindrica per una tal linea retta, cioè per un qualunque punto di essa.

O pure si prenda nella linea retta data un punto

ad arbitrio, e poi si costruisca quella superficie conica che ha per vertice un tal punto, e che tocca la proposta superficie plectoide (299). Il piano tangente cercato sarà quello, che si condurrà tangente a questa superficie conica, per un qualunque altro punto della linea retta data.

SCOLIO GENERALE.

362. Per completare dintorno alle superficie plectoidi quelle ricerche generali, che colla moderna Geometria di sito si possono stabilire, si sarebbero dovuti qui recare quegli altri Problemi ove proponesi a costruire l'intersezione di una di esse con una qualunque altra superficie curva. Ma tali altre cose sono di facile comprensione dopo tutto quello che in questo Capitolo, e nel X. fu detto; che perciò si potranno intorno ad esse esercitare i giovani. E non sarebbe anche fuor di proposito, ch'essi s'impegnassero ad indagare le proprietà di taluna di siffatte superficie specialmente definita, e che imprendessero anche ad esaminare in qual modo per essa restino modificate le soluzioni de' problemi, che generalmente si sono in questo Capitolo risolti. Un tale esercizio potrebbe forse ricondurre sulle orme geometriche degli antichi geometri, e supplire in qualche parte al gran materiale che su tale argomento essi ci avevano preparato in quelle loro opere perdute, le quali trattavano di queste tali superficie, con profondità ed estensione, come si rileva dalle indicazioni. che ce ne sono pervenute. Del che altrove fu già detto.

C A P. XVI.

DI QUE' SOLIDI NE' QUALI LA SEZIONE PERPENDICOLARE ALL'ASSE È UN TRIANGOLO RETTILINEO; E SPECIALMENTE DEL CONO-CUNEO DI WALLIS.



303. Per illustrare alquanto la difficile ed imperfetta teorie delle superficie plectoidi abbozzata nel Capitolo precedente, ho stabilito di occuparmi nel presente de' qui summentovati solidi; tanto più che dalle ricerche che stabilirò intorno ad essi i giovani potranno trarre materia per utilmente esercitarsi; e che queste daranno anche luogo ad alcune conseguenze degne di essere avvertite.

304. *Def.* Se due linee qualsivogliano CBA, FED (fig. 93.) abbiano un comune asse LM, il quale sia la comune sezione de' loro piani normali l'uno all'altro; le congiungenti BE degli estremi di due ordinate corrispondenti ad una stessa ascissa, rappresenteranno i lati di uno de' solidi suddetti.

305. *Scol.* Se la linea FED diventi una linea retta parallela all'asse LM (fig. 94,) e che l'altra CBA sia un semicerchio descritto sull'asse stesso; in questo caso il solido descritto, come poc' anzi, sarà il *Cono-cuneo* considerato dal Wallis nel Vol. II. delle sue opere, e perciò detto *del Wallis*. E se la linea FED (fig. 95) diventasse una linea retta comunque inclinata all'asse LM; il solido risultante lo diremo *Cono-cuneo acuminato*.

PROP. CII. PROBL.

306. *Determinare l'equazione alla superficie di un qualunque solido, in cui la sezione perpendicolare all'asse è un triangolo.*

Da un punto P preso in un lato qualunque di un tal solido (fig. 93.) si abbassi sul piano di una delle due linee CBA (304) la perpendicolare PL, che cadrà nell'ordinata BG, e sarà parallela all'altra EG.

Ciò posto le due linee CBA, FED sieno rapportate, per mezzo delle loro equazioni, allo stesso asse LM, in cui sia K il comune principio delle ascisse; e le coordinate KG, GN, NP al punto P della superficie curva s'indichino con x, y, z , sarà $GB = f(x)$, $GE = F(x)$, e quindi $NB = f(x) - y$. Ma sta $BG : GE :: BN : NP$, cioè $f(x) : F(x) :: f(x) - y : z$. Adunque l'equazione alla superficie di un tal solido sarà

$$z \times f(x) = F(x) + f(x) - y + f(x).$$

307. *Cor. Se la direttrice FED (fig. 94) sia una linea retta rappresentata dall'equazione $y' = c$, e perciò parallela alla LM; e che l'altra direttrice CBA sia un semicerchio del diametro $CA = a$; la precedente equazione generale si cambierà in quest'altra al cono-cuneo di Wallis, cioè*

$$(c - x) \sqrt{(ax - x^2)} = cy.$$

308. *E se la FD (fig. 95) sia una qualunque linea retta, che s'inclini alla LM in un angolo dato, il cui seno sia m , ed n il coseno, e che incontri la LM alla distanza $FC = c$, dall'estremo C del diametro del semicerchio CBA base del cono-cuneo acuminato; l'equazione alla superficie di questo solido sarà*

$$\left[\frac{m}{n} (c + x) - z \right] \sqrt{(ax - x^2)} = \frac{my}{n} (c + x)$$

che si ridurrà all'altra

$$(mx - nz) \sqrt{(ax - x')} = mxy$$

nel caso che il punto ove la FD incontra l'asse LM sia l'estremo C del semicerchio CBA. Ed in simil guisa si potrebbe rilevare l'equazione alla superficie di ciascuno de' due suddetti solidi, se la curva CBA si supponesse essere qualunque altra diversa dal cerchio.

P R O P. CIII. T E O R.

309. *Se le direttrici CBA, FED (fig. 96.) de' lati di una delle superficie sopra descritte (304) sieno due curve in cui le ordinate, che corrispondono ad uno stesso punto dell'asse, serbinsi un rapporto costante; in tal caso siffatta superficie curva diverrà cilindrica.*

Imperocchè in tal caso gli angoli EBG, GEB, in cui inclinasi un lato qualunque di tal superficie a ciascuno de' piani in dove esistono le direttrici di esso, saranno determinati in grandezza, ed invariabili. Vale a dire ch'essi lati s'inclineranno all' uno ed all'altro de' suddetti piani sempre nello stesso angolo; e perciò saranno paralleli tra loro. Laonde la superficie curva sopra descritta diverrà in questo caso quella di un cilindro.

310. *Cor. 1.* Quindi ogni sezione prodotta in uno de' suddetti solidi da un piano parallelo ad uno di quelli ove trovansi le curve direttrici de' suoi lati, sarà una curva identica ad una parte della direttrice corrispondente.

311. *Cor. II.* È chiaro che quando si verifica la condizione del rapporto costante delle ordinate corrispondenti nelle direttrici, queste curve dovranno essere del genere stesso, e della stessa natura.

312. *Cor. 111.* Che se le direttrici CBA, FED (*fig. 97*) sieno due linee rette; la superficie descritta sarà quella di un piano, che avrà per tracce queste stesse linee rette.

313 *Cor. 11.* E se le due direttrici CBA, FED (*fig. 96*) fossero del tutto identiche, sicchè abbattendosi il piano MLFD sull'altro MLCA, esse dovessero coincidere; in tal caso le GA, GE sarebbero uguali; ed uguali anche gli angoli in E, B.

SCOLIO

314. Ciò che si è detto nella Prop. precedente, e ne' suoi corollarj, potendosi facilmente estendere al caso più generale in cui l'angolo de' piani delle due direttrici sia obbliquo, se ne potrà perciò dedurre i seguenti due teoremi.

I.

315. *Se nella base di un cilindro qualunque tirisi una linea retta ad arbitrio, e per questa si faccia passare un piano, che seghi il cilindro; la sezione prodotta dovrà essere una curva dell'ordine stesso, ed aver la stessa natura che quella parte della base del cilindro, che da essa ne troncava la linea retta tirata.*

Imperciocchè è chiaro, che segandosi l'unghietta cilindrica che in tal modo si ottiene con piani perpendicolari alla linea retta tirata da principio, le sezioni che da questi si produranno in essa unghietta, sieno tanti triangoli simili tra loro; e quindi que' lati di questi che sono perpendicolari a quella linea retta, e che perciò rappresentano le ordinate nelle due curve seguate sulla superficie cilindrica, dalla sua base, e dall'

altro piano che si è supposto segarla, saranno tra loro in un rapporto costante. Laonde per ogni ascissa comune x , se l'ordinata ad una di tali curve sarà espressa da $F(x)$, quella all'altra lo dovrà essere da $\lambda \times F(x)$: perciò l'equazione a ciascuna di tali curve dovrà risultare del medesimo grado, e della stessa forma; e quindi esse dovranno appartenersi ad un ordine stesso, ed essere anche della medesima specie.

II.

316. *E se quel piano segante s'inclini a'lati del cilindro in quell'angolo stesso, in cui questi s'inclinavano alla base di un tal solido; la sezione sarà una curva affatto identica a quella parte della base del cilindro che se n'era troncata colla linea retta tirata in essa.*

317. *Cor. Ed estendendo queste due verità si potrebbe generalmente dire, che:*

III.

Le sezioni prodotte da un piano qualunque nella superficie di un cilindro sono curve tutte dell'ordine, e della specie stessa, le quali diverranno identiche, se que' piani s'inclinino similmente a'lati del cilindro.

PROP. CIV. PROBL.

318. *Se il cono-cuneo di Wallis si seghi con un piano parallelo alla base; determinare la figura della sezione.*

Il piano segante *cha* (fig. 94.) incontri un lato qualunque del cono-cuneo in *b*, donde si abbassi sul piano del rettangolo la perpendicolare *bg*, che cadrà nell'intersezione delle *ca*, *EG*. Or perchè *GB*:

$gb :: EG : Eg$, e quindi GB^2 , cioè CGA . o cga : $gb^2 :: EG^2 : Eg^2$; si vede perciò, che la curva cba sarà un'ellisse, in cui ca rappresenta l'asse maggiore, ed il minore è quanto la quarta proporzionale in ordine a GE , Eg , e ca , o CA .

319. Nell'equazione $(c-x) \sqrt{ax-x^2} = cy$ (307) si ponga $x = h$, supponendo che h sia la distanza del piano segante dalla base del cono-cuneo di Wallis; e si avrà per equazione alla curva di sezione la seguente.

$$y = \frac{c-h}{c} \sqrt{ax-x^2}$$

E facendo $c : c-h :: a : b$, essa diverrà

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{ax-x^2}$$

ch'è all'ellisse poc' anzi indicata.

320. E se nella stessa equazione generale si fosse posto $y = h$, si sarebbe avuta, per la sezione parallela al rettangolo, la seguente equazione

$$(c-x) \sqrt{ax-x^2} = ch$$

ch'è ad una linea di quart'ordine.

321. *Scol.* Le precedenti considerazioni si potranno facilmente estendere a qualunque de' solidi definiti al n. 304., il che potrà servire di esercizio a coloro che coltivano la moderna analisi. Intanto se le direttrici di uno di tali solidi sieno due linee rette, come e rappresenta la figura 98, sicchè un tal solido sia il cono-cuneo acuminato ad ambe le direttrici rettilinee: ritenute le stesse indicazioni del n. 306, se sieno p e q il seno e coseno dell'angolo che forma l'altra direttrice CA coll'asse LM ; l'equazione a questa darà la $GB = \frac{px}{q}$: e quindi quella del solido si trasmuterà in questo caso nell'altra

$$\left[\frac{m}{n} (c+x) - z \right] \frac{px}{q} = \frac{my}{n} (c+x)$$

E perciò l'equazione alla sezione parallela al piano delle x, y , alla distanza $z = h$ sarà la seguente

$$\left[\frac{m}{n} (c+x) - h \right] \frac{px}{q} = \frac{my}{n} (c+x)$$

e quella all'altra sezione parallela al piano dell'altra direttrice, ossia al piano delle x, z , alla distanza $y = k$, sarebbe

$$\left[\frac{m}{n} (c+x) - h \right] \frac{px}{q} = \frac{my}{n} (c+x)$$

L'una e l'altra delle quali è, come si vede, ad una sezione conica.

322. E si vede ancora, che supponendo in esse equazioni la $c = 0$, sì l'una che l'altra si riduca a rappresentare una linea retta; lo che coincide con ciò che si è detto al n. 312.

PROP. CV. PROBL.

323. *Costruire l'intersezione di un cono-cuneo di Wallis con un piano parallelo al rettangolo.*

Sia HLK una tal sezione (fig. 99.). E poichè il piano secante HLK si suppone parallelo al rettangolo CFDA, dovrà esso intersegare un qualunque lato EB del cono-cuneo suddetto, e l'ordinata corrispondente BG nel cerchio che n'è base, in modo che congiunta la LM, sia questa perpendicolare a quel cerchio, e parallela alla EG. Laonde sarà BG : GE :: BM : ML; il che darà la seguente geometrica costruzione della suddetta curva d'intersezione.

324. Col centro il punto G, e cogli intervalli GB, GM descrivansi gli archi circolari Bb, Mm; poi con-

giungasi la Eb , ed elevata da m la mL' perpendicolare alla LM , si tiri per L' la $L'l$ parallela alla LM , sarà l un punto di tal curva rappresentata sul piano verticale $CFDA$. E similmente se ne assegneranno gli altri; ond'è ch'essa resterà facilmente descritta sul piano del rettangolo.

PROP. CVI. PROBL.

325. *Construire l'intersezione di un cono-cuneo di Wallis con un piano che passi per una qualsivoglia perpendicolare al diametro della sua base.*

Sia HK (fig. 100.) una perpendicolare al diametro CA della base del cono-cuneo, e per tal linea retta passi il piano segante, che produca in questo solido la sezione KNL . Da un punto qualunque N di questa si abbassi sul piano del rettangolo la perpendicolare NM , che cadrà nell'intersezione HL di quel piano segante col rettangolo $CADF$; e sia inoltre EB quel lato del cono-cuneo che passa per lo punto N , sarà $EG : GB :: EM : MN$. Laonde si avrà la seguente costruzione geometrica di una tal curva.

326. Col centro G , intervallo GB , si descriva l'arco circolare Bb , e giungasi la Eb ; indi si tiri per M la MN' parallela alla CA , e dal punto M stesso si elevi alla HL la perpendicolare Mn uguale alla MN' ; sarà questa uguale alla MN , e quindi il punto n rappresenterà uno di quelli della curva da descriversi.

327. *Scol. 1.* La proiezione orizzontale di una tal curva d'intersezione può anche facilmente determinarsi: poichè se si prenda sulla GB una parte Gn' uguale alla Mn , sarà n' la proiezione del punto N ; e similmente si assegneranno le proiezioni orizzontali ri-

spettive degli altri punti di una tal curva, ond'è che si avrà così la proiezione di essa nel piano del cerchio ch'è base del cono-cuneo.

328. *Scol. 11.* In questa sezione si comprendono tutte quelle altr prodotte nel cono-cuneo di Wallis da un piano perpendicolare al rettangolo, e che un tal geometra ha considerate individualmente, come può vedersi nel suddetto volume delle sue opere.

Si potrebbe inoltre il cono-cuneo FCKAD concepir segato da un piano, il quale passi per uno de'lati del rettangolo; il che dà tre sezioni, quella cioè fatta per CA, l'altra per FD, e la terza per AD, o CF, le quali convengono tra loro, e con quella parallela al rettangolo FCAD, nell' avere per loro limite comune il rettangolo suddetto. Ma queste tali ricerche sono facilissime a rilevarsi da chiunque, che per ciò per brevità le tralascio.

PROP. CVII. PROBL.

329. *Per un punto dato nella superficie del cono-cuneo di Wallis, condurre ad esso un piano tangente.*

Sia b un tal punto (*fig. 94*), e cba la semiellisse, che dinota la sezione prodotta in tal solido da un piano, che passa per quel punto, ed è parallelo alla base di esso; e sia inoltre EbB il lato corrispondente dello stesso solido. Or se per gli punti b , B s'intendano tirate al semicerchio, ed alla semiellisse le tangenti BN , bK , queste e la FD dinoteranno le direttrici di quella linea retta che genera una superficie plectoide, la quale tocca quella del cono-cuneo di Wallis lungo il lato EbB ; che perciò si vede, che i due lati di tal super-

ficie plectoide corrispondenti alle due diverse genesi delle quali essa è suscettiva (288), e che passano per lo stesso punto b , sieno per l'appunto le linee rette EbB , bK . Laonde saranno queste linee rette i determinanti del piano tangente cercato.

33o. *Scol.* Si divida la ca per metà in O , ed in ordine ad Og , ed Oc si ritrovi la terza proporzionale OK ; intendendosi congiunta la bK , sarebbe questa la tangente dell'ellisse cba nel punto b : quindi la EK dovrà rappresentare la traccia verticale del piano tangente cercato; e perciò prolungandosi questa linea retta fino alla LM in H , l'altra linea retta BH sarà la traccia orizzontale corrispondente del piano stesso.

C A P. XVII.

DEL CILINDROIDE.



331. *Def.* Se quella linea retta che rappresenta la minima distanza di due altre linee rette date nello spazio, si rivolga circolarmente dintorno a quel punto ov' essa incontra una di tali linee rette presa come asse, trasportando seco l'altra, la quale vi resti immobilmente connessa; si descriverà da questa la superficie di un solido indefinito per due versi, che per la sua forma, e perchè ogni sezione perpendicolare all'asse è un cerchio, come nel cilindro, potrassi convenevolmente chiamare *cilindroide*.

232. *Cor. 1.* Si rileva da tal genesi che il minimo cerchio sia quello che vien descritto dalla minima distanza, e che gli altri vadano mano mano crescendo dall'una, e dall'altra parte, a proporzione che si allontanano dal minimo: che perciò la superficie di questo solido sia come ristretta nel luogo del cerchio descritto dalla minima distanza, doude poi proceda slargandosi sempre dalle due parti in forma di un imbuto.

233. *Cor. 2.* Se l'asse di questo solido si prenda anche come asse di quel cilindro che ha per raggio la minima distanza tra le due linee rette proposte, è egli chiaro che tal cilindro debba essere inscritto nel cilindroide, ed aver comune con esso solamente quel cerchio descritto dalla minima distanza suddetta; che perciò si vede che la linea retta generatrice della superficie del cilindroide debba, in qualunque luogo si ritrovi nel giro

ch' essa fa, toccare la superficie di quel cilindro in un punto della circonferenza del cerchio il cui raggio è la minima distanza. Adunque il piano condotto per tal linea retta, e pel lato corrispondente al punto ov'essa tocca la superficie di quel cilindro, dovrà esser tangente a questo. Ed inoltre la proiezione di quella linea retta sopra un piano perpendicolare all'asse del cilindro, dovrà essere tangente la traccia di questo sul piano stesso, cioè quel cerchio descritto sopra di un tal piano, col centro il punto ov'è incontrato da quell'asse, e col raggio quanto la minima distanza.

334. *Scol.* Il solido che si è qui sopra definito, e che abbiamo chiamato cilindroide; poichè esso è in effetto, come si vedrà tra poco, quello stesso che il Wallis immaginò generarsi dalla rivoluzione dell' iperbole dintorno al suo semiasse conjugato, e che chiamò con tal nome, è stato da' moderni Geometri Descrittivi Francesi denominato bizzarramente *hyperboloide de revolution a une nappe*. Nè parmi ch' essi abbiano in alcun luogo fatta avvertire l' identicità del loro solido con quello del Wallis, quantunque il Newton avesse già fatta rilevare nella sua Aritmetica Universale la genesi del cilindroide per una linea retta, come in appresso mostreremo (*).

PROP. CVIII. TEOR.

335. *I determinanti del sito, e della figura di un cilindroide sono il sito del suo asse, e quello della linea retta che genera la superficie di esso.*

Dinoti AB (fig. 101) l'asse dato, e CD la linea retta generatrice della superficie di un cilindroide; e l'uno

(*) Newton *Arithmetica Universalis* Prop. XXXIII.

e l'altra incontrino un piano perpendicolare alla AB in B, C ; sarà dato il cerchio descritto col raggio BC , ch'è quello descritto su tal piano dall'estremo C della DC nel suo moto: e sarà anche data la minima distanza AB delle AB, DC (100).

Inoltre col centro B , e col raggio uguale ad AD si descriva il cerchio EFG , che sarà la base del cilindro inscritto nel cilindroide, e dal punto D si abbassi sul piano KHC la perpendicolare DE , che sarà il lato del suddetto cilindro nel punto D ov'è toccato dal lato corrispondente CD del cilindroide: che perciò sarà dato il punto E , quindi la BE , e finalmente l'angolo EBC . E volendo un qualunque altro lato di questo solido, quello, per esempio, che incontra il cerchio KHC in H , si unisca la BH , poi costituiscasi al punto B della BH l'angolo HBL uguale al dato CBE , e per lo punto L si tiri il lato corrispondente del cilindro, cioè LM uguale ad ED ; congiunta la HM , sarà questa, com'è facile a comprendersi, il lato che si cerca. E così di ogn'altro.

Laonde potendosi assegnare geometricamente il sito di ciascun lato del cilindroide proposto, sarà perciò dato il sito della superficie di esso; ed i determinanti di questa saranno quelli, che sono sopra enunciati, ed i quali, come si è veduto, sono bastanti a stabilire il sito di que'lati.

P R O P. CIX. T E O R.

336. *Ad ogni cilindroide, per ogni punto del minimo cerchio, gli corrispondono due lati, i quali sono due generatrici diverse della superficie di un tal solido.*

Rappresenti anche come nel Teor. precedente AB

l'asse (*fig. 102*), DC la generatrice della superficie di un cilindroide, ed AD la minima distanza tra le AB , DC , la quale sia proiettata in BH sul piano del cerchio CHc . Al punto B della BH si costituisca l'angolo HBC uguale al dato HBC , e si unisca la Dc . Finalmente congiungansi le Ac , AC .

È chiaro primieramente che sieno uguali tra loro le DC , Dc , come anche le AC , Ac ; che perciò ne' triangoli ADC , ADc dovranno pareggiarsi gli angoli ADC , ADc , e quindi questo secondo sarà retto al pari che il primo. Adunque la AD rappresenta anche la minima distanza tra le due altre linee rette AB , Dc .

Or il punto D sia proiettato in d , e quindi sia Dd il lato del cilindro inscritto nel cilindroide generato dalla linea retta FDC ; e si prenda in AB un qualsivoglia punto B' , per lo quale si concepisca condotto un piano parallelo a quello del cerchio CHc , e quindi anche perpendicolare alla AB : un tal piano intersegherà gli altri DdC , Ddc nelle linee rette $D'C'$, $D'c'$ parallele rispettivamente alle dC , dc , che perciò saranno uguali tra loro non meno le DC' , Dc' , che le $D'C'$, $D'c'$, e congiunta la $B'D'$, gli angoli $B'D'C'$, $B'D'c'$ saranno uguali tra loro del pari che gli altri BdC , Bdc , che gli pareggiano rispettivamente (10. *EL. XI.*). Adunque dovranno anche esser tra loro uguali le $B'C'$, $B'c'$, e quindi i punti C' , c' esistenti nelle due linee rette diverse DC , $D'c'$ da ciascuna delle quali si genera, rivolgendosi come sta detto nella definizione (301), la superficie di un cilindroide, descriveranno in tal genesi una medesima circonferenza di cerchio; e così sempre dimostrandosi per tutti quegli altri punti delle linee rette FDC , fDc , i quali sono equidistanti da D , ne segue che le due linee rette diverse FDC , fDc descrivono una stessa superficie di cilindroide; che perciò questa potrà esser

generata da due linee rette diverse, le quali s'intersecano in un punto del minimo cerchio. C. B. D.

337. *Cor.* Dalla precedente dimostrazione si rileva, che tali due generatrici s'inclinano similmente a quel lato del cilindro che passa per lo punto del minimo cerchio ov'esse s'intersecano; e di più che la proiezione di quel raggio di questo che passa per tal punto, sopra un piano qualunque perpendicolare all'asse, divide per metà l'angolo compreso dalle congiungenti il punto ove tal piano incontra l'asse, con quelli ov'è incontrato dalle suddette due generatrici del cilindroide. E ciò è necessario a sapersi, affinchè data una delle due generatrici, si possa determinar l'altra.

LEMMA

338. *Se a parti opposte del punto M (fig. 103), ch'è un estremo della minima distanza ML tra le due linee rette AB , CD si prendano le parti uguali ME , Me : e da' punti E , e si abbassino sull'altra linea retta AB le perpendicolari EF , ef ; queste dovranno essere uguali tra loro; come anche le FL , fL .*

Imperocchè si concepiscano rivolgersi circolarmente, e nel medesimo tempo, le MD , LB intorno a' punti M : L : è chiaro che quando la MD coinciderà colla MC , la LB dovrà coincidere colla LA ; e quindi coincidendo il punto e con E , dovrà la ef cadere sulla EF , e 'l punto f in F . Adunque saranno uguali tra loro non meno le LF , Lf , che le FE , fe . C. B. D.

PROP. CX. TEOR.

339. *La generatrice della superficie di un cilindroide , descrive al di sopra , ed al di sotto del suo punto di minima distanza dall'asse due parti di superficie identiche tra loro .*

Imperocchè sia , come nel Lemma precedente , M quel punto ove la minima distanza dall'asse incontra la generatrice DC della superficie di un cilindroide ; e presi dalle due parti di questo punto M , sulla CD , le ME , Me uguali tra loro , saranno uguali le perpendicolari EF , ef , che da' punti E , e si abbassano sull'asse AB , e quindi i cerchi che nel generarsi la superficie del cilindroide si descrivono da queste linee rette : che perciò è chiaro , che le due parti della superficie di tal solido l'una descritta dalla MD , e l'altra dalla MC sieno identiche tra loro .

PROP. CXI. TEOR.

340. *Se un cilindroide si seghi con un piano per l'asse , ciascuna curva prodotta nella sua superficie avrà due parti simili , che si riuniranno in un punto della circonferenza del minimo cerchio .*

Imperocchè siccome tutt' i cerchi equidistanti dal minimo sono uguali tra loro , è chiaro perciò che que' due rami di curva che rappresentano l'intersezione suddetta , a contar dal punto ove il piano segante incontra la circonferenza del minimo cerchio , sieno tali , che ad uguali ascisse computate sull'asse , dal punto dov' è incontrato dalla minima distanza , vi corrispondono uguali ordinate ; che perciò tali due rami dovranno essere tra loro identici. C. B. D.

341. *Scol.* Per lo centro del cerchio minimo s'intenda condotta una parallela alla linea retta generatrice della superficie del cilindroide, e questa poi rivolgersi dintorno all'asse, serbandovi sempre la stessa inclinazione; descriverà una superficie conica, che, come si rileva chiaramente, non dovrà mai incontrare quella del cilindroide; che perciò sarà assintotica della superficie di questo solido. Ed il piano condotto per l'asse del cilindroide segnerà questa superficie conica in due linee rette, che saranno gli assintoti delle due curve in cui il piano stesso segante incontra quest'ultima superficie.

PROP. CXII. PROBL.

342. *Determinare la figura della sezione prodotta in un cilindroide da un piano che lo sega comunque.*

Sia IQK (fig. 104.) la sezione prodotta in un cilindroide da un piano, e questo sia segato da quel piano per l'asse che gli è perpendicolare, dovrà la comune sezione di siffatti due piani dividere quella sezione IQK nelle due parti identiche KQO, IQO; e l'angolo CHQ sarà quello in cui l'asse del cilindroide inclinasi al piano segante. Inoltre sia CD la minima distanza tra un tal asse, e la generatrice XY della superficie del cilindroide, e questa in qualunque luogo del suo giro incontri in un punto L il perimetro della sezione IQK. Ciò premesso si tiri per D la linea retta DF parallela all'asse AB, e poi per le AC, CB s'intenda passare un piano; dinoterà LDF l'angolo in cui s'inclina ad un tal piano la linea retta XLY. Dopo ciò, dal punto L si tirino sulle linee rette DF, AB, OQ le perpendicolari LF, LG, LM, e giungansi le FG, MG; sarà il piano LGF perpendicolare all'altro GFDC, la figura del quale è un rettangolo. Quindi l'angolo DLF rappresenterà

l'inclinazione della linea retta XY al piano FLG, o a qualunque altro piano perpendicolare all'asse AB del cilindroide proposto.

Or pongasi $CD = FG = a$

$CH = c$

$HM = x$

$ML = y$

Ed essendo dato di specie il triangolo GHM, sarà data la ragione di MH : HG, ch' esprimasi per $p : a$, e sarà $HG = \frac{ax}{p}$, e quindi $CG = c + \frac{ax}{p}$ E

per la stessa ragione, chiamando $q : a$ la ragione di FD : FL, nell'altro triangolo FDL anche dato di specie, sarà $q : a :: FD$, o GC : FL, cioè $q : c + \frac{ax}{p} :: \frac{ac}{q} + \frac{a^2x}{pq} = FL$. E perciò essendo $GL^2 = FG^2 +$

FL^2 , sarà $GL^2 = a^2 + \frac{a^2c^2}{q^2} + \frac{2a^3cx}{pq^2} + \frac{a^4x^2}{p^2q^2}$. Adunque sarà $GL^2 - MG^2$, cioè ML^2 o sia

$$y^2 = \frac{a^2q^2 + a^2c^2}{q^2} + \frac{2a^3c}{pq^2}x + \frac{a^4 - p^2q^2 + a^2q^2}{p^2q^2}xx$$

Nella quale equazione le due indeterminate x, y non oltrepassando il secondo grado, apparisce chiaramente, che la curva d'intersezione proposta sia una sezione conica. E si rileverà facilmente, che se l'angolo MHG sia maggiore dell'altro LDF, in un tal caso risulterà negativo il valore del coefficiente della x^2 , e quindi tal curva sarà un'ellisse; che se al contrario quel primo angolo sia minore di questo secondo, il suddetto coefficiente sarà positivo, e quindi un'iperbole la curva d'intersezione. Finalmente supponendosi uguali tali angoli, quel coefficiente diverrà zero, e quindi la curva d'intersezione sarà una parabola, o anche un parallelogrammo, se i punti C, ed H coincidano.

343. *Scol.* Nel secondo de' casi suddetti si comprende quello in cui si suppone svanire l'angolo GHM, ossia che il piano segante passi per l'asse del cilindroide; ed in questo caso la curva d'intersezione sarà un'iperbole rappresentata dall'equazione $y^2 = a^2 + \frac{a^2}{q^2} x^2$, o pure $y^2 = \frac{a^2}{q^2} (q^2 + x^2)$, ove a rappresenta il semiasse primario, e q il secondario, per rispetto al quale si trova rilevata una tale equazione.

Or sieno REP, *rep* (fig. 105) le due iperboli opposte dell'equazione suddetta, nelle quali un cilindroide è intersegato da un piano condotto pel suo asse BA, e sieno Ss, Tt le due linee rette in cui un tal piano intersega la superficie assintotica di quella del cilindroide, e perciò gli assintoti di quelle iperboli (341). Dal punto E si elevi la Ec perpendicolare alla CE, sarà questa quanto il semiasse secondario delle due iperboli. E siccome l'assintoto Ss dee esser parallelo alla generatrice del cilindroide in un dato sito, sicchè tali due linee rette si dovranno inclinare al piano del circolo descritto dalla CE in uno stesso angolo, che sarà quanto cCE; perciò un tal angolo sarà quello in cui inclinasi costantemente la generatrice del cilindroide al piano del suddetto cerchio. Laonde dovendo stare il semiasse primario dell'iperbole REP al suo secondario, cioè $a : q :: CE : Ec$, sarà quello a questo, come il raggio alla tangente dell'angolo in cui la generatrice del cilindroide inclinasi ad un piano perpendicolare al suo asse: che perciò potrassi agevolmente descrivere in un piano quell'iperbole, dalla cui rivoluzione dintorno all'asse secondario si genera quel

cilindroide; che si era esibito co' determinanti espressi nel n. 331.

344. *Cor.* Adunque il cilindroide definito al n. 331 può concepirsi anche generato da una determinata iperbole le quale si rivolga dintorno al suo asse secondario; ed esso è perciò precisamente quel solido che con tal nome fu considerato da Wallis, e che i Geometri moderni chiamano *cilindroide di Wallis*; il che fu anche accennato al n. 334.

PROP. CXIII. PROBL.

345. *Construire la superficie di un cilindroide il cui asse sia perpendicolare ad uno de' piani di proiezione.*

Sia o (fig. 106) la proiezione dell'asse sul piano cui è perpendicolare, ed $O'a'$ la corrispondente sull'altro piano di proiezione perpendicolare al primo; sieno inoltre ab , e $B'a'$ le proiezioni della linea retta generatrice di esso, ed il cerchio acd sia la proiezione orizzontale del cerchio descritto dalla minima distanza della generatrice dall'asse, e di questo stesso cerchio ne dinoti la corrispondente proiezione verticale la linea retta $c'a'd'$ parallela alla LM , ed uguale alla cd , cioè quanto il doppio della minima distanza suddetta. Ciò premesso.

346. *Cas. 1.* Sia n la proiezione data di un punto della superficie del cilindroide proposto, sul piano cui è perpendicolare l'asse di esso, e si cerchi la corrispondente sull'altro de' piani di proiezione.

Si determini il punto b ove la generatrice di una tal superficie incontra il piano orizzontale, e col centro o , intervallo ob si descriva il cerchio bef , che sa-

rà quello che si descriverrebbe nel piano orizzontale dalla generatrice suddetta, nel suo intero giro; indi per lo punto n si conduca al cerchio acd la tangente utv , che lo tocchi nel punto t , il qual si progetti sulla $c'd'$ in t' : è chiaro, che il piano verticale condotto per la utv dovrà passare per quel punto della superficie del cilindroide, che ha per proiezione orizzontale n , ed intersegarla in due suoi lati, i quali s'intersecano in quel punto del minimo cerchio che ha per proiezioni le t, t' , ed incontrano il piano orizzontale ne' punti u, v della circonferenza bef . Laonde proiettandosi i punti u, v in U', V' sul piano verticale, e congiunte le $U't', V't'$, saranno queste le rispettive proiezioni verticali di tali lati; che perciò in ciascuna di esse dovrà cadere la proiezione verticale del punto n . Adunque queste proiezioni verticali saranno due diverse rappresentate da' punti n', n'' ne' quali le $V't', V't'$ sono intersegate dalla perpendicolare indefinita abbassata da n sulla LM .

347. *Cas. 2.* Che se al contrario la proiezione data del punto da costruirsi esistesse sul piano di proiezione verticale, e fosse, per esempio, il punto n' . Si concepisca condotto per questo un piano orizzontale, che sarà dato per mezzo della sua traccia verticale, ch'è la parallela $l'm'$ condotta per n' alla LM : si determini il punto d'incontro di questo piano colla generatrice data della superficie del cilindroide (75), e sia g' la proiezione verticale di tal punto d'incontro, e g l'orizzontale; col centro o , intervallo og si descriva il cerchio gnp , che sarà la proiezione orizzontale di quello in cui il piano condotto per la $l'm'$ intersegha il cilindroide, e nella periferia del quale doveva trovarsi allogato il punto proiettato in n' . Laonde se dal punto n' si tiri sulla LM la perpendicolare

indefinita $n'N'un$, ciascuno de' due punti n in dove questa intersegherà la circonferenza gnp sarà la proiezione orizzontale corrispondente di ciascuno di que' due punti ne' quali la perpendicolare condotta per n' al piano verticale incontrava la superficie del cilindroide.

348. *Scol. 1.* Oltre alla tangente $untv$, può anche per lo punto n condursi al cerchio stesso acd l'altra tangente $rnsq$: e se per questa s'intenda pure condotto un piano verticale, dovrà anch'esso intersegare la superficie del cilindroide in due suoi lati, i quali s'incontreranno in quel punto della circonferenza del minimo cerchio, ch'è proiettato in s, s' , ed avranno per loro proiezioni verticali rispettive le $Q's', R's'$. Or questo piano, e quello condotto per l'altra tangente $untv$ (*cas. 1.*) s'intersecano nella verticale condotta per n : ed è poi chiaro che que' due lati della superficie del cilindroide, i quali incontrano il piano orizzontale in r, u , e che hanno per proiezioni verticali rispettive le $R's', V't'$, debbono incontrarsi in uno stesso punto di tal perpendicolare; e che similmente in uno stesso altro punto di questa debbono intersegarli quegli altri due lati, i quali incontrano quel piano di proiezione in q, v , e che sono proiettati in $Q's', V't'$ sul piano di proiezione verticale. Adunque è chiaro dal già detto che le $R's', Q's'$ debbano intersegarli colla $nN'n/n'$ ne' medesimi punti n', n'' ne' quali questa s'intersegava colle $U't', V't'$: la qual cosa si rilevava anche direttamente dal vedere, che la verticale condotta per n non può incontrare la superficie del cilindroide che in due punti solamente. E da ciò ne risulta, che sia indifferente il condurre al cerchio acd l'una o l'altra della tangenti $untv, rnsq$, per la risoluzione del primo caso del problema precedente.

349. *Scol. 2.* È facile poi a rilevarsi che la $n'n''$

debba esser divisa ugualmente dalla $c'd'$, cioè che i due punti della superficie del cilindroide proiettati in n debbano trovarsi ad uguali distanze dal piano del minimo cerchio, uno al di sotto, e l'altro al di sopra di esso. Dal che si deduce eziandio chiaramente, che, per le proiezioni verticali n' , n'' de' punti della superficie del cilindroide, vi corrispondano le stesse proiezioni orizzontali n , n .

PROP. CXIV. PROBL.

350. *Per un punto dato sulla superficie di un cilindroide tirare un piano che la tocchi.*

Poichè per lo punto dato sulla superficie del cilindroide vi debbono passare due lati corrispondenti alla doppia genesi di cui è suscettiva tal superficie (336), si assegni perciò la proiezione orizzontale di ciascuno di questi; il che si ottiene facilmente, tirando per lo punto n (*fig. 106*), ch'è la proiezione orizzontale del punto dato, le due tangenti utv , rsq al cerchio cad , ch'è la proiezione orizzontale del cerchio descritto sulla superficie del cilindroide dalla minima distanza tra la generatrice di essa ed il suo asse: i punti u , r saranno quelli dove que' lati incontreranno il piano orizzontale.

Or siccome tali lati rappresentano due qualunque sezioni prodotte nella superficie del cilindroide da due piani che passano pel punto di contatto proposto, e ch'esse linee rette sono nel tempo stesso le tangenti di queste sezioni in quel punto; perciò il piano che passa per esse sarà il piano tangente cercato (124). Adunqua la traccia orizzontale di un tal piano tangente sarà la linea retta ur , e la verticale si potrà determinare per mezzo della Prop. xx. (63).

Che se la proiezione verticale del punto di contatto dato corrispondente alla stessa proiezione orizzontale n , fosse stata l'altro punto n'' nel quale confluiscono le proiezioni verticali di quegli altri due lati della superficie del cilindroide, i quali hanno per proiezioni verticali le $Q'n''$, $V'n''$; in tal caso, come si vede, la traccia orizzontale del piano tangente sarebbe stata la qv .

351. *Cor. 1.* Congiungasi la on , dovrà questa esser perpendicolare alle ur , qv ; che perciò il piano tangente il cilindroide in un punto dato nella sua superficie, dovrà risultar perpendicolare a quel piano che passa per l'asse, e pel punto di contatto, e passar quindi per la tangente del cerchio orizzontale, che corrisponde, nella superficie del cilindroide, al piano suddetto.

352. *Cor. 2.* E da ciò si rileva, che ogni piano il quale passa per un qualsivoglia lato di un cilindroide, dovrà toccare questo solido in quel punto, nel quale un tal lato incontra quel piano per l'asse, ch'è perpendicolare al piano proposto.

353. *Scol.* Dalla soluzione del precedente problema potrà rilevarsi, in qual modo la nuova genesi, che al cilindroide Wallisiano si è assegnata nella definizione di esso (331) faciliti, e renda più elegante la costruzione del problema di tirarli un piano tangente.

L E M M A

354. *Se l'asse di una sezione conica sia perpendicolare alla linea retta nella quale il piano in cui essa esiste intersega un altro piano; la proiezione di quella curva su questo piano sarà un'altra sezione conica della specie stessa, il cui parametro starà a quello della proposta in una data ragione, cioè come il raggio al coseno dell'angolo d'inclinazione di que' piani.*

Rappresenti $b'DE$ (fig 107) una sezione conica, e $B'de$ la sua proiezione; e l'asse $b'A'$ di quella curva insista perpendicolarmente alla comune sezione $A'a$ del piano di essa curva col piano di proiezione: che perciò l'angolo $a'A'M$ contenuto dall'asse e dalla sua proiezione rappresenti quello in cui inclinansi i suddetti piani. Sieno inoltre Dd' , Ee' due ordinate della sezione conica $b'DE$, e $D'd$, $E'e$ le loro corrispondenti proiezioni, che saranno rispettivamente quanto quelle ordinate (196 dim.). Ciò permesso.

La curva $b'DE$ sia una parabola, starà $b'd' : b'e' :: d'D' : e'E'$, o $:: D'd^2 : E'e^2$. Ma è pure $b'd' : b'e' :: B'D' : B'E'$. Laonde sarà $B'D' : B'E' :: D'd^2 : E'e^2$; e perciò l'altra curva $B'de$ sarà pure una parabola.

Or sia P il parametro della prima parabola, e P' rappresenti quello della sua proiezione, sarà $d'D' = b'd' \times P$, e $D'd^2 = D'B' \times P'$. Laonde siccome sono uguali que' quadrati, così saranno anche uguali questi rettangoli; quindi sarà $d'b' \times P = D'B' \times P'$; e perciò $P' : P :: b'd' : D'B'$, cioè come $R : \cos. a'A'M$.

In secondo luogo la curva $b'DE$ sia un'ellisse; di cui l'altro vertice sia il punto c' , e C' la proiezione di esso, sarà $d'D' : c'E' :: D'd^2 : E'e^2 :: b'd' \times d'c' : b'c' \times e'c'$, cioè $:: B'D' \times D'C' : B'E' \times E'C'$; vale a dire che la curva $B'de$ sarà anche un'ellisse.

E supponendo essere P , P' i parametri di queste due ellissi, sarà per la prima di esse $b'd' \times d'c' : d'D' :: b'c' : P$, e per l'altra sarà $D'd^2 : B'D' \times D'C' :: P' : B'C'$. Laonde, per essere $d'D^2 = D'd^2$ starà $b'd' \times d'c' : B'D' \times D'C' :: (b'c' : P) (P' : B'C')$, o pure $:: (P' : P) (b'c' : B'C')$. E quindi $P' : P :: (b'd' \times d'c' : B'D' \times D'C') (B'C' : b'c')$, cioè $(b'd' : B'D') (d'c' : D'C') (B'C' : b'c')$, e finalmente $:: b'd' : B'D'$ vale a dire come $R : \cos. a'A'M$.

E la stessa dimostrazione si potrebbe applicare anche all'iperbole.

355. *Scol.* Nel presente lemma vi si contiene come un caso particolare l'altro recato nel n. 196.

PROP.^a CXV. PROBL.

356. *Construire l'intersezione di un cilindroide con un piano qualunque.*

Un tal problema, che, come si vede, è un caso del problema generalmente proposto pe' solidi di rivoluzione nel Cap. IX, n. 190, può, per la specialità di questo solido, restar più elegantemente costruito nel seguente modo.

Sia IQK (*fig. 104*) il piano segante il cilindroide $RQPpr$, e la curva d'intersezione IQK si voglia proiettare sopra un piano PIp perpendicolare all'asse del cilindroide.

Si determini l'asse QO di quella curva (342), e quindi il suo vertice Q , del quale ne sia q la proiezione corrispondente nel piano PIp , e quindi qA quella dell'asse. Ed essendo dato di sito il piano segante IQK , sarà pur dato l'angolo in cui inclinasi ad esso l'asse del cilindroide, e quindi l'altro dell'inclinazione di un tal piano a quello di proiezione, cioè l'angolo QOq . Laonde sarà data la specie della curva IQK (342), e perciò quella della sua proiezione (354), della quale ne sarà anche noto il parametro; quindi essa si potrà facilmente descrivere intorno all'asse qO , e col vertice q .

357. *Scol.* Se il piano segante fosse stato perpendicolare all'asse, sarebbesi all'istante costruito quel cerchio ch'è l'intersezione di un tal piano colla superficie del cilindroidificio, ed il quale ha per raggio la per-

pendicolare che dal punto ove quel piano incontra la generatrice della superficie curva suddetta, si abbasserebbe sull'asse della superficie stessa. Che se poi il piano segante passasse per lo centro C del cilindroide, inclinandosi all'asse AB di questo in un angolo ch'è complemento di quello in cui la generatrice YX s'inclina al piano orizzontale PIp ; in un tal caso l'intersezione di quel piano colla superficie del cilindroide sarà rappresentata da que' lati di questo solido, che incontrano il piano orizzontale in que' punti ne' quali la traccia orizzontale del piano segante intersega la circonferenza del cerchio PIp .

PROP. CXVI. PROBL.

358. *Per una linea retta data condurre un piano tangente una data superficie di rivoluzione intorno ad un asse verticale.*

Sia a (fig. 108) la proiezione orizzontale data dell'asse della superficie di rivoluzione, $A'a'$ la proiezione verticale dello stesso, $a'i'p'$ la curva generatrice della superficie di essa, e bc , $b'c'$ rappresentino le due proiezioni della linea retta di sito, per la quale vuol condursi il piano tangente.

Dal punto a si abbassi sulla bc la perpendicolare ad , che sarà la proiezione orizzontale della minima distanza tra l'asse della superficie di rivoluzione, e la retta data di sito, ed essa ad esprimerà anche in grandezza una tal minima distanza. Ciò posto si concepisca descritta dalla retta di sito la superficie del cilindroide intorno all'asse verticale dato (331), dovrà il piano tangente cercato toccare anche tal superficie in un punto della retta data (352). Or per l'asse e per lo con-

tatto di questo piano tangente colla superficie di rivoluzione si concepisca passare un piano; intersegherà questo la linea retta di sito in un punto pel quale vi passa un cerchio orizzontale nella superficie del cilindroide: ed è chiaro, che la tangente di questo cerchio in tal punto, e quella dell'altro che passa, nella superficie di rivoluzione, pel punto di contatto, debbano esser parallele tra loro; poichè sono perpendicolari allo stesso piano verticale che poc' anzi si è concepito passare per l'asse. Laonde il piano tangente cercato, passando per la tangente del cerchio nella superficie di rivoluzione, e per quel punto della tangente dell'altro cerchio nella superficie del cilindroide, ch'era nella retta data di sito; dovrà passare anche per questa tangente (32). Dal che si rileva, che quel punto d'incontro del piano verticale colla retta di sito sia il punto ove il piano tangente condotto per questa alla superficie di rivoluzione data, tocca anche quella del cilindroide. Finalmente è chiaro che quel piano verticale per l'asse debba intersegare la superficie di rivoluzione data nella sua generatrice; la superficie del cilindroide in un' iperbole (343), e finalmente il piano tangente queste due superficie curve in una linea retta, la quale dev' esser tangente comune a quelle due curve.

Or poichè qualunque piano conducasi per l'asse della data superficie di rivoluzione segna in questa superficie, ed in quella del cilindroide sempre le stesse curve generatrici, ed in identico sito; perciò sul piano di proiezione verticale si prenda dal punto e' sulla retta $e'd'$, ch'è la proiezione verticale della minima distanza tra quell'asse e la retta di sito la $e'r'$, uguale alla ad , cioè alla minima distanza suddetta, e poi col semiasse primario $e'r'$, e col secondario quello che si ottiene nel modo descritto nel n. 343 si descriva l'iperbole conica

$g'r'f'$, sarà questa la generatrice del cilindroide. Finalmente a siffatta iperbole ed alla curva $a'i'p'$ si tiri la tangente comune $g'i'$, o anche più d'una, se si può: dinoterà il punto i' quello da cui si descrive la circonferenza di cerchio nella quale trovasi allogato il contatto del piano cercato colla proposta superficie di rivoluzione; g' sarà l'altro punto da cui si descrive la circonferenza dell'altro cerchio nella superficie del cilindroide, in un punto della quale è questo solido toccato dal piano stesso, e la perpendicolare $g'n'$ alla $A'a'$ ne sarà il raggio. Laonde se per a si tiri la af parallela alla LM , e che dal punto g' si abbassi sulla LM la perpendicolare indefinita $g'G'g$, e finalmente col centro a intervallo ag si descriva il cerchio gh , sarà questo la proiezione orizzontale del poc'anzi detto; e quindi il punto h ove la circonferenza gh intersega la retta cb sarà la proiezione orizzontale dell'intersezione del piano in cui si trova il cerchio proiettato in gh colla retta di sito data, cioè del punto di contatto del piano tangente cercato colla superficie del cilindroide. Adunque la retta ah sarà la traccia orizzontale di quel piano per l'asse che passava pel punto di contatto suddetto, e per l'altro dello stesso piano tangente colla superficie di rivoluzione: che perciò la proiezione orizzontale di questo punto dovrà cadere nella ah ; ma essa dee anche esistere nella circonferenza ik descritta col centro a , intervallo uguale ad $i't'$: quindi una tal proiezione sarà dinotata dal punto k ; e perciò abbassandosi da k sulla LM la perpendicolare fino alla $i't'$, sarà k' la corrispondente proiezione verticale di quel punto di contatto, ed il presente Problema si sarà ridotto al già risoluto nella Prop. LV. (139) di questo Trattato.

359. Scol. La soluzione recata al precedente Pro-

blema , sebbene fondata sugli stessi principj che quella del Sig. Monge (pag. 56. n. 47. *Géométrie Descriptive*) è però più elegante di questa , in cui si ha bisogno di construir per punti l'intersezione del piano per l'asse colla superficie del cilindroide ; ed inoltre la citata soluzione del Monge aveva bisogno di esser rischiara-
rata moltissimo ne' principj che costituiscono i passaggi della costruzione di essa , senza di che sarebbe restata oscura , e come fondata su principj arbitrariamente assunti.

C A P. XVIII.

CONSIDERAZIONI GENERALI SULLO SVILUPPO
DELLE SUPERFICIE CURVE.

360. *Def. XIX.* Una superficie curva si dirà *svilupata*, se essa siasi distesa in un piano, in modo che le sue parti nè restino interrotte, nè alcuna di esse ne copra altra.

361. *Cor.* Si rileva da ciò che la superficie curva viluppata dee esser precisamente della stessa grandezza ch' era prima dello sviluppo.

362. *Scol.* L' oggetto di questo sviluppo è il poter disegnare più facilmente, e più comodamente le curve che si erano segnate sulla superficie sviluppabile; e può anche talvolta applicarsi convenevolmente alla soluzione di alcuni Problemi, del che ne daremo un saggio in appresso.

PROP. CXVII. TEOR. GENERALE.

363. *Esaminare le condizioni geometriche dello sviluppo delle superficie curve.*

Da' primi Elementi di Geometria è noto, che si possa sviluppare la superficie di un prisma o di una piramide, non considerandovi le basi; e che non sia altronde sviluppabile la superficie di un qualunque poliedro. Or estendendo un poco la condizione che ren-

de' eseguibile lo sviluppo de' due sopra indicati solidi, si vedrà, che se in un piano si tirino le rette AB , AD , CF , EG ec. (fig. 109), le quali s'incontrino due a due in A , C , E , ec., si potrà sempre immaginare che rivolgendosi lo spazio angolare indefinito DCF intorno ad AD si ponga ad angolo coll'altro BAD : che similmente, rivolgendosi lo spazio angolare FEG intorno ad EF si ponga ad angolo con DCF , e così in seguito; sicchè dall'insieme di tutti questi spazj BAD , DCF , FEG , ec. si verrà a rappresentare una superficie indefinita compresa da piani, che sarà sviluppabile. Adunque la condizione geometrica perchè sia sviluppabile una superficie composta da piani è, come si rileva dal già detto, che questi sieno indefiniti almeno per un verso. Or se, per la nota legge di continuità, dalla superficie del prisma si passi a quella del cilindro; dalla superficie della piramide a quella del cono; e dall'ultima superficie poc'anzi descritta si passi a quella superficie curva rettilatera la quale da essa, per l'anzidetta legge, si deriva, si potrà concludere generalmente, che: *Sarà sviluppabile una superficie curva, se essa sia indefinita al meno per un verso, ed i suoi lati convengano l'un con l'altro.*

364. *Cor. 1.* Adunque non sarà sviluppabile la superficie di una sfera, e quella di un qualunque solido di rivoluzione, e ciò era già noto dagli Elementi; nè sarebbe sviluppabile una superficie plectoide qualunque.

365. *Cor. 2.* Allorchè, per la legge di continuità, la superficie sviluppabile rappresentata nella fig. 109 diviene una superficie curva, le AC , CE , EG , ec. costituiranno una curva a doppia curvatura segnata nella superficie sviluppabile suddetta; ed i lati AD , CF , EG , ec. di quella essendo i prolungamenti degli ar-

chetti AC, CE, EH, ec. rappresenteranno le tangenti di tal curva in A, C, E, ec.

366. *Scol.* Le condizioni dello sviluppo delle superficie si possono in più modi determinare. Noi qui ci siamo attenuti a quello primordiale che la Geometria somministra; ed altrove imprenderemo a rinvenirle per le vie dell'Analisi moderna, e col risolvere il seguente Problema: *Ritrovare l'equazione generale per tutti que' solidi la superficie de' quali può spiegarsi in un piano.* Sopra di che si potrà per ora consultare la dottissima Memoria dell'Eulero, inserita nel vol. XVI. de' nuovi Atti dell'Accademia di Pietroburgo.

PROP. CXVIII. PROBL.

367. *La tangente di una curva segnata sopra di una superficie sviluppabile, comprenda, sullo sviluppo di questa, con quel lato che passava per lo contatto, lo stesso angolo che vi comprendeva prima dello sviluppo.*

Imperocchè si supponga un tale sviluppo eseguirsi precisamente su quel piano che passa per la tangente e pel lato suddetto, e che perciò tocca quella superficie curva nel punto di contatto proposto; sarà manifesto che allor quando un tale sviluppo si sarà effettuato, non avranno sofferta alcuna alterazione nè quel lato, nè quella tangente, perchè esistevano già nel piano dello sviluppo. Adunque è chiaro che non dovrà mutarsi l'angolo ch'esse rette comprendono.

368. *Scol.* Essendo facile il determinare l'angolo che la tangente d'una curva segnata in una superficie sviluppabile comprende col lato che passa per lo contatto, si vede in qual modo si potrà determinare, sullo sviluppo di questa superficie, il sito che vi pren-

de quella tangente. E ciò generalmente assegnato ci risparmi di proporre particolarmente ne' seguenti problemi siffatta determinazione.

PROP. CXIX. PROBL.

369. *Sviluppare una data superficie cilindrica ; e rappresentar poi su questo sviluppo una curva data in essa*

Prendasi per piano di proiezione orizzontale un piano che seghi ovunque la superficie proposta perpendicolarmente alla sua retta generatrice ; sarà questa , in tutte le sue posizioni , perpendicolare alla curva d'intersezione da un tal piano segnata sulla superficie cilindrica. Ciò posto, si esponga una linea retta indefinita PZ (*fig. 110 n. 1, e 2*), e da un punto di essa P si ascindano le PQ , QR , RS , *ec.* rispettivamente uguali alle parti, ch , $h'h'$, $h'h''$ *ec.* di quella curva, incominciando da un suo punto qualunque , e nell'ordine come si sono indicate, finchè si ritorni al punto stesso, cioè finchè la retta PY sia uguale alla curva *chec.* Da' punti P , Q , R , *ec.* si elevino sulla PZ delle perpendicolari indefinite, che rappresenteranno, sullo sviluppo della superficie cilindrica, la retta che la genera nelle posizioni c , h , h' *ec.* ; e troncate da esse le parti Pp , Qq , Rr , *ec.* uguali rispettivamente alle altezze orizzontali di que' punti dell'intersezione data in essa, i quali trovansi nella generatrice che passa pe' punti c , h , h' , *ec.* cioè a dire uguali alle rispettive $C'c'$, $T't'$, *ec.* la curva pqr che passerà per tutti questi punti p , q , r , *ec.* in tal modo determinati, rappresenterà quell'intersezione disegnata sullo sviluppo della superficie cilindrica.

370. *Scol.* Si tiri da un punto m ad un altro n , presi sullo sviluppo della superficie cilindrica, la retta mn : è chiaro che questa dovrà intersegare le Pp , Aq , Rr , *ec.*, che rappresentano i lati della superficie cilindrica sullo sviluppo di essa, in uno stesso angolo. Or siccome non cambiasi sullo sviluppo di una superficie cilindrica, nè l'estensione di questa, nè quella di una curva in essa esistente, nè finalmente la posizione rispettiva di tal curva colla generatrice di quella superficie in tutte le posizioni che tal generatrice ha nel descriverla; è chiaro perciò, che quella curva sulla superficie cilindrica, ch'è dinotata nello sviluppo di questa da una linea retta, dee intersegare tutt'i lati del cilindro sotto lo stesso angolo. Ed al contrario ogni volta che una curva segnata in una superficie cilindrica fa co' lati di questa lo stesso angolo, cioè 'ch'essa è un' *elica*, dovrà sullo sviluppo di quella superficie venir espressa da una linea retta.

Ciò posto, poichè la linea retta mn è la più breve di quante possonsene condurre dal punto m all'altro n , e ch'essa dinota una parte di un' *elica* sviluppata; ne segue anche dal già detto, che la più breve via per andare sopra di una superficie cilindrica da un punto ad un altro sia l'arco dell' *elica* che attraversa que' due punti.

E ciò che in ultimo si è detto in questo Scolio potrà di leggieri estendersi alle superficie coniche, ed in generale a tutte le superficie sviluppabili, cioè, che: *Tutte le volte che un arco di curva in taluna di esse segnato si sviluppi in una linea retta, dovevasi da quello rappresentare la più corta distanza in su tal superficie curva tra que' due punti che n'erano gli estremi.*

PROP. CXX. PROBL.

371. *Sviluppare una superficie conica a base qualunque, ed indi segnare su tale sviluppo una linea curva data in essa.*

Si costruisca l'intersezione della proposta superficie conica con un'altra sferica concentrica (*pr. LXX. cas. 1.*), è evidente che tutt'i punti di quest'intersezione essendo equidistanti dal vertice della superficie data, debbono trovarsi sullo sviluppo di essa ad uguali distanze da quel punto ch'esprime il vertice, ed esser perciò allogati in un arco circolare descritto con un raggio uguale a quello della sfera, e nel quale il centro dinota il vertice della superficie conica uello sviluppo di essa. Or sia T (*fig. 61. n. 2.*) il centro di quest'arco indefinito XYR , ed X dinoti un punto preso in esso, e corrispondente all'altro sull'intersezione delle due superficie conica e cilindrica, ch'è proiettato in k , k' (*fig. 61.*), e dal quale si voglia incominciare a ridurre su quell'arco circolare questa intersezione. Per ciò eseguire bisogna che prima essa si privi di una delle sue due curvature, sviluppandola, cioè, in un piano. Ad ottener questo, si sviluppi quella superficie cilindrica verticale, che ha per traccia la proiezione orizzontale di siffatta intersezione, e sulla quale questa esiste, e poi si rapporti sopra di questo sviluppo tal curva stessa, ch'era segnata sulla superficie cilindrica, e su quella della sfera e del cono; perderà così essa una delle sue due curvature; e tal linea in questo modo disegnata nel piano, sia rappresentata dalla $xyvuz$ (*fig. 61. n. 2, e n. 3.*). Ciò posto si ripieghi siffatta curva sull'arco XYR , vale a dire si porti, per e-

sempio, l'arco xy di essa, parte a parte, da X in Y sull'arco circolare XYR ; il punto Y sarà sulla superficie conica sviluppata: ed allorchè l'intera curva $xyvuz$ si sarà ripiegata sull'arco XYZ , l'intero settore $XYZT$ rappresenterà lo sviluppo della proposta superficie conica.

Finalmente se in ciascun raggio TV (*fig. 61. n. 2.*) si prenda un punto V il quale disti dall'altro T , per quanto è distante dal vertice A della superficie conica proposta quel punto della curva d'intersezione in essa segnata, il quale trovasi in quel suo lato, che vien dinotato da TYV sullo sviluppo, la curva che passerà per tutt' i punti V in simil modo derminati, dinoterà la curva segnata sulla superficie conica rapportata sullo sviluppo della stessa.

372. *Scol.* Se la superficie conica che si vuole sviluppare fosse quella di un cono retto a base circolare; in un tal caso la curva d'intersezione di essa colla superficie sferica concentrica sarebbe un cerchio parallela alla sua base. E siccome il raggio di questa sfera può prendersi ad arbitrio, sarà perciò conducente, nel presente caso, di prender per esso il lato di un tal cono; perchè così la curva d'intersezione sarà dinotata dalla base stessa, o sia dalla traccia orizzontale della superficie conica. Ciò posto se nella circonferenza del cerchio descritto con un raggio TX (*fig. 61. n. 2.*) quanto il lato del cono dato si prenda l'arco XYZ uguale alla circonferenza della base di esso (244); il settore $XYZT$ dinoterà lo sviluppo della superficie di un tal cono.

L E M M A I.

373 *Se i diametri di due semicerchi si dividano proporzionalmente; le semiordinate condotte pe' punti delle divisioni divideranno anche proporzionalmente le semicirconferenze.*

Sieno ACB , acb (fig. 111.) due semicerchi descritti co' diametri BA , ba , e questi sieno divisi proporzionalmente in E , e ; sarà $BE : EA :: be : ea$, e quindi componendo, poi prendendo le metà degli antecedenti, e finalmente convertendo starà $AD : DE :: ad : de$, ossia $CD : DE :: cd : de$; che perciò i triangoli CDE , cde saranno simili (7. vi.), e quindi l'angolo CDE sarà uguale all'altro cde , e l rimanente CDB al rimanente cdb . Ma l'angolo CDB sta all'altro CDA , come l'arco BC all'arco CA ; come pure sta l'angolo cdb all'angolo cda , come cb a ca . Adunque starà $BC : CA :: bc : ca$.

L E M M A II.

374. *La semiellisse DHB (fig. 112) che vien segnata sulla superficie del semicilindro $DAMBC$ da un piano perpendicolare al rettangolo $DABC$, condotto per la diagonale DB di esso, divide la semicirconferenza FHG prodotta sulla stessa superficie cilindrica da un piano parallelo alla base, nella stessa proporzione nella quale il diametro GF di questo divide la semicirconferenza DEA descritta sul lato DA del semicilindro, e nel piano del rettangolo, cioè sta $FG : FH :: DA : DE$.*

Imperocchè si conduca per K la KL parallela alla

DA, per L si ordini nel semicerchio AMB la LM, e giungasi la KH, che sarà perpendicolare al piano del rettangolo DABC, perciò parallela alla LM, e quindi uguali gli archi AM, FH. E poichè $AE : DF :: BA : FK$ o AL ; starà anche $AED : DE :: BMA : AM$ (*lem. prec.*), cioè $:: FHG : FH$.

375. *Scol.* Dimostrandosi similmente che stia $fh : fhg$, o $FHG :: De : DEA$; starà, per equalità, $fh : FH :: De : DE$.

PROP. CXX. PROBL.

376. *Dividere un arco o pure un angolo dato in data ragione.*

TERZO METODO PER MEZZO DELLO SVILUPPO DI UNA SUPERFICIE CILINDRICA (*).

Si sviluppi la superficie di un semicilindro DAMBC (*fig. 112*) segnando inoltre su tale sviluppo la semiellisse DHB ch'era in essa; e sia un tale sviluppo rappresentato dalla figura 113, nella quale sia perciò ab uguale alla semicirconferenza AMB, $ad = AD$, e la curva $dTQb$ rappresenti la semiellisse DHB sullo sviluppo della superficie del semicilindro. Or si descriva sulla ad il semicerchio aed , nel cui centro O si costituisca l'angolo dON che sia quanto il dato P, poi per N si tiri la QNR parallela alla bc , la quale si divida in S nella data ragione di $m : n$, cioè stia $QS : SR :: m : n$. Per S si conduca la ST parallela alla ad , e finalmen-

(*) Si riscontrino gli altri due nel Cap. XIII. dal num. 240. al 243.

te per lo punto T ove questa parallela incontra la linea bTd si conduca la TXV parallela alla ba , e tal parallela incontri in X la semicirconferenza aXd ; congiunta la OX , questa dividerà il dato angolo dON nella ragione di $m : n$, cioè starà $NX : XD :: m : n$.

Imperocchè sta $QR : TV$ o $SR :: Nd : dX$ (375), e perciò dividendo $QS : SR$, cioè $m : n :: NX : Xd$, o come l'angolo NOX all' altro XOd .

C A P. XIX.

NUOVO METODO DEL SIG. FERGOLA PER RISOLVERE ALCUNI
PROBLEMI DI SITO, DETTO DI CONVERSIONE.

377. Questo nostro insigne Geometra, il cui genio per le Matematiche rendendolo superiore alle difficoltà di queste Scienze, lo fece essere il suo stesso precettore in un paese ove fino alla sua epoca mancava una buona e completa istituzione in tali facoltà, essendosi di buon' ora accorto della difficoltà de' problemi di sito, immaginò de' nuovi metodi utilissimi a risolverne un gran numero de' più restii alle ordinarie ricerche, e gli propose nel 1786 e 1787. alla Reale Accademia delle Scienze di fresco fondata in Napoli. Or io crederei di far gran torto a' coltivatori de' metodi geometrici, se qui tralasciassi di recare i mezzi che in tali casi propone questo valentuomo, atti non solamente a render più piana la strada per riuscire nel risolvimento di questi difficili problemi; ma anche capaci a farne rinvenire, ove vestigio alcuno non sembrava mai che ne fosse, ed a sottoporre ancora al vasto dominio dell' Algebra questa famiglia di Problemi, che sembrava esserne refrattaria. Io dunque, senz'altro fare, presenterò in questo Capitolo del presente Trattato un breve estratto de' principj da lui esposti nella prima delle suddette Memorie, e poi nel seguente recherò i principali di que' problemi di sito, che trovansi con tal suo metodo risolti nella stessa Memoria, ed in un'altra che le vien dopo. E negli altri due Capitoli dopo i già detti proporrò altre sue ricerche su questo stesso importante argomento.

378. Il nostro autore primieramente rapporta a tre principali generi i problemi di Sito, riferendo al primo di essi que' problemi ne' quali *una grandezza data vuolsi con un certo sito adattare entro più linee date di posizione*. Al secondo poi quegli altri ove *la grandezza da adattarvisi non sia data che di sola specie*. Ed al terzo finalmente egli riduce que' problemi di sito, che *non si appartengono ad alcuno de' due generi precedenti*. Ed una tal distinzione è già di gran vantaggio nell'intraprender la soluzione di uno de' problemi di quest'estesissima famiglia, e nell'adattarvi il conveniente metodo tra quelli da lui proposti.

379. Premessa tal distinzione, per riguardo a' primi due generi di Problemi di Sito egli propone il seguente metodo, che chiama giustamente.

PRINCIPIO DI CONVERSIONE

Quando una grandezza data si vuole adattare con un certo sito fra più linee rette date di posizione, un tal problema resterà legittimamente risoluto, se vicendevolmente riuscirà di adattare alla grandezza data quelle linee rette, che con essa ottenendo il sito addimandato, serbino puranche tra loro la data posizione.

380. Una tal principio di conversione non solamente l'è il fonte onde risolversi facilmente coll'antica, o pur colla moderna analisi moltissimi problemi di sito, come tra poco faremo vedere; ma l'è anche fecondo del riduzione di tali problemi a pochissimi cardinali che per tal ragione egli chiama acconciamente Porismi, e che sono i seguenti.

P O R I S M A I.

381. *Dati i due circoli EQF, EQAD (fig. 114. n. 1.), che s'interseghino in E, Q; tirare per lo punto E la segante ECA, sicchè CA parte di essa che resta fra gli archi QC, QA, pareggi la retta M.*

A N A L I S I G E O M E T R I C A.

S'intenda tirata la segante ECA che si addimanda: e s'intendano eziandio condotte le rette AQ, CQ, che uniscano l'altro punto Q cogli estremi A, C della parte richiesta. Ciò posto

Essendo dati di posizione, e di grandezza i circoli EQF, EQAD che s'intersecano, sarà data la retta QE che congiugne le loro sezioni Q, E: onde sarà dato non meno l'angolo QAC, che l'altro QCE, e quindi QCA conseguente di questo.

È pur data la base AC del triangolo AQC, che dalle condizioni del problema dee pareggiare la retta M. Adunque esso triangolo AQC è dato di specie e di grandezza: quindi sarà dato di grandezza sì il lato QA, che l'altro QC; ed il problema sarà risoluto.

P O R I S M A II.

382. *Data di posizione la retta DE (fig. 115.) e'l circolo ANB, e dato di più il punto A nella sua periferia; applicare tra essa retta e l'arco l'altra retta BC, che sia uguale ad M, e congiunta la AB sia l'angolo ABC uguale al dato X.*

CASO I.

La retta DE incontri primieramente il circolo ne punti D, E, e s'intenda protratta verso N la retta BC, che si vuole adattare col proposto sito tra l'arco EBN, e la retta DC. Ciò posto eccone di un tal caso la corrispondente

ANALISI GEOMETRICA

L'angolo ABC è dato dall'ipotesi; l'altro DCA n'è dato eziandio, a cagione de' punti dati A, D; sarà dunque dato l'angolo DEC di loro somma, e quindi CBL conseguente di questo (intendendosi la retta DB prodotta verso L).

Di più essendo dato l'angolo DEC, come si è veduto, ed essendo pur anche dato l'altro DBE (imperocchè è dato dall'ipotesi il segmento DBE), sarà dato l'angolo EBC di lor differenza.

Per la qual cosa essendo dati i due angoli CBL, CBE, e dovendo essere la retta CB uguale alla data M, sarà dato di posizione il punto C rispetto ai lati DB, BE dell'angolo DBE dato. Onde il medesimo problema ridurrassi al seguente altro

PROBLEMA.

DI RIEUZIONE PEL PRIMO CASO DEL PORISMA PRECEDENTE.

383. Dato il punto C (fig. 116) fuori l'angolo dato DBE; tirare per esso la retta CED, sicchè la parte DE di questa, che resta fra i lati del dato angolo, sia di una data lunghezza.

ANALISI GEOMETRICA.

Sia già fatto ciò che si cerca, e per gli punti A e D si tirino le AG, DG parallele rispettivamente alle ED, BE. Ed essendo data la ED, sarà anche data la sua uguale AG; ma di questa n'è pur dato il suo estremo A; adunque l'altro estremo G apparterrà ad una circonferenza di cerchio data di posizione (8). Si compia la figura come si vede, e sarà il parallelogrammo FE uguale all'altro EL (43. *El.* 1.), cioè al parallelogrammo costituito dalle AE, EK o BD, nell'angolo EBD; che perciò il parallelogrammo contenuto dalle FD, EA o DG, nell'angolo poc' anzi detto, essendo uguale a' due equiangoli ad esso contenuti da FB, EA, e da BD, EA, cioè a' due HEAC, e BEHF, ossia all'intero parallelogrammo FBAC, sarà dato il parallelogrammo FBAC, del pari che questo FDG, e quindi il punto G dovrà appartenersi ad un'iperbole. Ma si apparteneva anche ad una circonferenza di cerchio data di posizione. Adunque sarà dato il punto G.

COMPOSIZIONE GEOMETRICA.

Sia ABD (*fig.* 117.) l'angolo dato, ed M la data retta da applicarsi in esso, sicchè passasse per lo dato punto C.

Si compia il parallelogrammo CB, e poi tra gli assintoti CF, FD si descriva l'iperbole conica gAG, la quale passi per lo dato punto A: di poi col centro questo stesso punto, e coll'intervallo dato M si descriva il cerchio KGL, che seghi l'iperbole in G, sarà dato il punto G (9); e tirando per esso la GD parallela alla BA, giungasi la CD: dico che la ED sia uguale alla data retta M.

Imperocchè si unisca la AG , e, tirisi per G la GN parallela alla BD , sarà, per la natura dell'iperbole, $FD : AC :: AB : DG$, cioè, sostituendo alla ragione di $FD : AC$ l'altra uguale di FC o $BA : AE$, sarà $BA : AE :: BA : DG$. Adunque AE è uguale a GD ; e perciò la figura $EAGD$ è un parallelogrammo, ed ED è uguale ad AG , cioè alla linea retta data M .

384. *Scol.* Il cerchio KGL dee necessariamente intersegare l'iperbole GAg in un altro punto g , per mezzo del quale si otterrà l'altra delle due soluzioni sempre possibili del problema proposto, rappresentata in figura dalla Cde . Ed allorchè la retta data M sarà di tal grandezza, che quel cerchio debba intersegare anche l'iperbole $G'A'g'$ opposta alla GAg , diverranno anche possibili gli altri due casi di questo problema solido, propriamente di quarto grado, i quali daranno una linea retta quanto la data M , adattata per lo punto G tra i lati dell'altro angolo FBA conseguente del dato ABD .

CASO II. DEL PORISMA II.

385. La retta DE non incontri il circolo dato NBA (*fig. 118*).

SOLUZIONE.

Si calino dal centro Q , e dal punto dato N (*Ved. l'anal. geom. del cas. 1.*) le perpendicolari QR , NP sulla medesima DE , e congiuntavi la retta CQ , si tiri per C la tangente CS . Ciò posto sia

$$\left. \begin{array}{l} NP = a \\ QR = b \\ CR = x \\ QS = g \\ RP = e \\ EC = f \end{array} \right\} \text{ sarà } \left\{ \begin{array}{l} QC^2 = b^2 + x^2 \\ CS^2 = b^2 + x^2 - g^2 \\ CP = c + x \\ CX = \sqrt{a^2 + (c+x)^2} \\ NC \times CB = f \sqrt{a^2 + (c+x)^2} \end{array} \right.$$

E dovendo essere per la natura del cerchio

$$NC \times CB = CS^2, \text{ sarà}$$

$$f \sqrt{(a^2 + (c+x)^2)} = b^2 + x^2 - g^2$$

Or pongasi I $y^2 = a^2 + (c+x)^2$,

n' emergerà II $fy = x^2 + b^2 - g^2$,

e di queste due locali quella n°. I si appartiene all'iperbole parilatera di cui ciascuno de' semiassi conjugati è a , $c+x$ è l'ascissa dal centro presa nel semiasse secondario, ed y la semiordinata corrispondente. E l'altra si riferisce alla parabola, in cui il parametro principale è f , l'ascissa y è presa sull'asse da un punto che dista dal vertice per una retta uguale alla quarta proporzionale in ordine ad f , $g-b$, $g+b$; e finalmente n° è x la corrispondente ordinata.

Che se dalla prima di tali locali si sottragga il doppio della seconda, n' emergerà l'equazione

$$\text{III } y^2 - 2fy = -x^2 + 2cx + a^2 + c^2 + 2g^2 - 2b^2,$$

ch'è al cerchio in cui il raggio è $\sqrt{(a^2 + f^2 + 2c^2 + 2g^2 - 2b^2)}$, $x-c$ l'ascissa dal centro, ed $y-f$ la corrispondente semiordinata. E quindi combinando la locale di quest'equazione con quella della seconda, si troverà il proposto problema convenevolmente costruito colla combinazione di un cerchio e di una parabola.

P O R I S M A III.

387. *Dati i due circoli BKT, FAH (fig. 119.), e'l punto F nella periferia di questo; adattare tra le dette periferie la retta AB, che sia uguale alla data M, e congiunta la FA sia dato l'angolo FAB.*

A N A L I S I G E O M E T R I C A.

I centri C, D de' due circoli dati giungansi

per la CD , che prolunghisi in E ; di poi si uniscano le AE , AH , le quali si prolunghino indefinitamente in X , Y , e col centro B , intervallo BD si descriva il cerchio DKR .

Ed essendo dato l'angolo FAB , non meno che l'altro FAE , sarà pur dato l'angolo EAB : ma è fra di loro data la retta AB , e l'angolo retto EAH ; saranno dunque dati di posizione l'angolo EAH e'l cerchio DKR . Sono anche date le rette EH , HD . Laonde la risoluzione del proposto Porisma si ridurrà a quella del seguente

P R O B L.

388. *Applicare nell'angolo retto XAY la data linea retta EH , sicchè sia data la linea retta HD intercetta fra il lato AY di quell'angolo, e'l dato cerchio DKR .*

ANALISI GEOMETRICA.

Dal punto D si tiri sopra di AY la perpendicolare DN ; e per gli triangoli simili AEH , HND sarà $EH : HD :: AH : HN$; ed $ED : AN :: HD : HN$, e quindi $ED^2 : AN^2 :: HD^2 : HN^2$. Laonde convertendo e permutando quest'ultima analogia sarà $ED^2 : HD^2 :: ED^2 - AN^2 : DN^2$; che perciò tagliandosi da AY la AP uguale alla ED , e prolungandosi XA in Z , sicchè AZ uguagli HD , sarà $AP^2 : AZ^2 :: AP^2 - AN^2 : DN^2$. Adunque il punto D apparterrà all'ellisse descritta co'semiassi AP , AZ ; e le intersezioni di questa col circolo DKR determineranno le posizioni della retta ED , che soddisfa alle condizioni del Problema.

PROBLEMA GENERALE

389. *Indicare le leggi del metodo di conversione, onde risolvonsi i problemi di sito del primo genere, e quelli del secondo.*

P A R T E I.

Allorchè si propone di adattare una grandezza data tra più linee date di sito, converrà procurare di circoscrivere a tal grandezza quelle linee in modo, che le conservino il sito addimandato, e sieno quivi disposte come sono date nel problema. Al che ottenere.

I°. Si osservino diligentemente i luoghi che nascono dalle posizioni di quelle linee, che voglionsi circoscrivere alla grandezza data. Ed essi saranno ordinariamente o rette, o archi di cerchio.

II°. Si vegga di più se per menare a fine questo problema converso basti determinare le sole sezioni de' mentovati luoghi; il che non di rado addiviene ne' problemi facilissimi di tal genere.

III°. E se ciò non basti, riflettasi attentamente alle posizioni delle linee proposte nel problema, affinchè la soluzione del problema converso si riduca a situare in mezzo a due circoli, o ad una retta ed un circolo un'altra retta data, con un dato sito.

P A R T E II.

Che se la grandezza da adattarsi tra più altre date sia di sola specie, il qual caso comprende tutti i problemi di sito del secondo genere (379), allora

I°. Si procacci di circoscrivere alla grandezza

data di specie le linee che le serbano il sito addimandato nel problema, e che quivi fra loro ottengano una posizione simile a quella, onde in esso sono proposte.

II°. Conosciutasi la ragione che serbano le parti di queste linee tagliate dalla grandezza che dentro di esse ne giace applicata, si saprà la ragione che dovranno avere gli analoghi segmenti delle linee date di posizione; onde di leggieri si conoscerà il modo di adattare entro le linee date la grandezza data di specie.

390. *Scol.* I Problemi che recheremo nel seguente Capitolo serviranno di rischiaramento a ciò che si è qui generalmente indicato.

C A P. XX.

PROBLEMI DI SITO DEL PRIMO, E DEL SECONDO GENERE
RISOLUTI PER MEZZO DEL PRINCIPIO DI CONVERSIONE
DEL SIG. FERGOLA.

PROBLEMI DEL PRIMO GENERE

P R O B L E M A I.

391. Dato il circolo FAQ (fig. 120. n. 1.), ed ovunque l'angolo rettilineo CNO ; adattare tra i lati di esso la retta CO , sicchè tirata per C la tangente CA al dato circolo, sia l'angolo ACO uguale al dato X .

CONVERSIONE DEL PROBLEMA.

S'intenda fatto l'angolo ACO uguale al dato X . e 'l lato CO uguale alla data retta M , e si procuri di adattarvi il circolo FAQ , e l'angolo rettilineo CNO , sicchè serbando fra loro quel sito col quale son proposti, ottengano coll'angolo ACO la richiesta posizione.

SOLUZIONE DEL PROBLEMA DI CONVERSIONE.

Sulla retta co (fig. 120. n. 1, e 2) uguale alla data M si formi il segmento circolare cno capace dell'angolo CNO ; sarà l'arco cno il luogo de' vertici di tali angoli. Di poi tirisi la retta fl parallela al lato

ac dell'angolo *aco* uguale ad *X*, che disti da esso per una retta uguale al raggio *FA* del dato circolo. E sarà tal parallela il luogo de' centri de' cerchi uguali ad *FAQ*, che tocchino tutti la retta *ac*.

Ciò posto, perchè il centro *F* del dato circolo ha una data distanza dal vertice *N* dell'angolo dato *ONC*, ed è data eziandio l'inclinazione della congiunta *FN* al lato *NC*, si ridurrà il proposto problema ad applicare tra la linea retta *fl* e l'arco *cno* un'altra retta *fn*, che sia uguale alla data *FN*, e che l'angolo *fn**c* pareggi il dato *FNC*, cioè al Porisma II.

392. *Cor.* La stessa soluzione converrà praticare, se il triangolo dato *COD* (*fig.* 120. *n.* 1.) vogliasi situare entro i lati dello stesso angolo *CNO* in maniera che gli angoli *C* ed *O* stiano su i lati *CN* ed *NO*, ed il lato *CD* prolungato tocchi il circolo dato *FAQ*.

S C O L I O

393. Ed un'analogha conversione e soluzione potrà adoperarsi quando vi voglia risolvere quest'altro

P R O B L E M A.

Dato ovunque l'angolo rettilineo CNO (fig. 121. n. 1. e 2.), e'l circolo FAQ, condurgli la tangente ACO, sicchè CO parte di essa che vien tagliata dallati del dato angolo pareggi la linea retta data M.

Sarà anche in questo caso l'arco *onc* descritto con le condizioni di poc' anzi il luogo de' vertici degli angoli uguali ad *N*. La parallela *fp* alla *oc* distante da essa per la *FA*, sarà il luogo de' centri degl'infiniti circoli uguali ad *FAQ*, e tangenti la retta *oca*. Ed

applicando tra l'arco *onc* e la retta *pf* la *nf* uguale alla retta data *FN*, e che faccia colla congiunta *cn* l'angolo *cnf* uguale al dato *CNF* (*por.* 11.), col centro *f*, intervallo *fu* uguale ad *FA* si descriva il circolo *faq*, avranno questo circolo e l'angolo *onc*, la posizione e la grandezza stessa che il circolo *FAQ* e l'angolo dato *ONC*; e la retta *aco* soddisferà al problema: sicchè volendo poi costruirlo sulla figura proposta, non resterà a far altro, che prendere *NO* uguale ad *no*, e condurre per *O* la tangente *OA* al circolo *FAQ*.

P R O B L E M A II. (*)

394. *Date di posizione le tre rette ae, ad cf (fig. 114. n. 1 e 2) che nè sieno tra loro parallele, nè convengano ad un medesimo punto, inscrivervi il triangolo EFD dato di specie e di grandezza, sicchè gli angoli, E, F, D giacciano sulle rette ae, cf, ad rispettivamente.*

S O L U Z I O N E

Sopra il lato *ED* del triangolo *EFD* si descriva il segmento circolare *EAD*, che contenga l'angolo *a*. Si formi parimente sopra l'altro lato *EF* il segmento *EQCF*. che in se comprenda gli angoli uguali ad *fce*. Indi si tiri per lo punto *E* la segante *ECA*, talchè la parte *CA* che resta fra gli archi de' segmenti costituiti adegui la data *ca* (*por.* 1. n. 381). Finalmente tirisi per *C* ed *F* la retta *CF*, e per *A* e *D* l'altra *AD*: conserveranno le tre rette *AE*, *AD*, *CF* una posizione identica alle tre date *ae*, *ad*, *cf*, ed in esse giacerà adattato il triangolo dato *EFD*, giusta le condizioni del Problema.

(*) Questo è il Lemma XXVI. de' Principj Matematici del Newton.

395. *Cor.* Con lo stesso artificio si scioglierà il seguente problema: *Adattare tra le medesime linee rette date* ae , ad , cf *un'altra linea retta, che sia data di grandezza, e vi sien dati di ragione i suoi segmenti tagliati dalle medesime.*

S C O L I O.

396. Si potrà anche per mezzo del precedente problema e del Lemma XXIII. de' Principj Matematici del Newton risolverne un altro, che, a prima vista, sembra difficilissimo, e che qui appresso rapporteremo, dopo di aver recato il Lemma suddetto.

L E M M A.

397. *Se due linee rette* AC , BD (*fig. 122*) *date di posizione, sieno terminate ne' punti* A , B , *ed abbiano una data ragione, e la retta* CD *che unisce i punti indeterminati* C , D *si seghi in* K *anche in ragion data: dico che il punto* K *sarà allogato in una retta data di posizione.*

Le rette AC , BD concorrano in E , e si faccia $BG : AE :: BD : AC$, ed FD sempre uguale alla data EG ; sarà per costruzione $EC : GD$ o $EF :: AC : BD$, e perciò in data ragione: laonde sarà dato di specie il triangolo CEF . Dividasi CF in L in modo che stia $CK : CD :: CL : CF$; e per esser data quella prima ragione, e quindi la sua uguale, sarà anche dato di specie il triangolo EFL , ed il punto L sarà allogato in una retta EL data di posizione. Si giunga LK , e sarà anche data la ragione di $LK : FD$, ch'è uguale a quella di $CL : CF$; quindi sarà data la LK , alla

quale se taglisi la EH uguale, e si giunga la HK , sarà un parallelogrammo la figura $EHLK$, ed il punto K si apparterrà alla linea retta HK data di posizione.

P R O B L E M A.

398. *Date le due linee rette AD, BN (fig. 123) terminate ne' punti D, N , applicarvi il dato triangolo ACB , sicchè gli angoli A, B tocchino le date rette AD, BN , e condotta per lo terzo angolo C la retta FCM in maniera che i segmenti FC, CM sieno in data ragione, in data ragione stia pure $FD : MN$.*

Essendo data la ragione di $FC : CM$, non meno che l'altra di $FD : MN$, il punto C , ove la retta FM , che soddisfa alla seconda delle condizioni esposte nel Problema, resta divisa in data ragione, dovrà trovarsi allogato in una retta CQ data di posizione (*lem. prec.*) Adunque il proposto problema si ridurrà ad adattare tra le tre rette date di sito AD, BN, CQ il triangolo dato ABC , cioè, come si era già indicato (396) a quello che si è risoluto nel n. 394.

P R O B L E M A III.

399. *Dato di posizione l'angolo rettilineo YAZ (fig. 124) ed il cerchio BDR ; adattare tra essi il dato triangolo FHD , sicchè l'angolo F sia nel lato XY di quell'angolo, l'altro H nell'altro lato FZ , e finalmente il terzo D nella circonferenza del cerchio dato.*

S O L U Z I O N E

Siasi adattato un tal triangolo nel modo proposto,

e sopra di FH s'intenda costituita la porzione di cerchio FAH , che in se comprenda angoli uguali al dato YAZ . Indi giungasi il punto A coll' altro B centro del cerchio DR , e si concepisca descriversi col centro D , intervallo DB il cerchio BKT .

E poichè la data porzione di circolo FAH poggia sopra FH lato del dato triangolo FHD , e che del cerchio BKT n'è D il centro; saranno perciò dati di sito i due circoli FAH , BKT : ma tra le circonferenze de' medesimi si trova adattata la data linea retta AB in modo che l'angolo FAB è dato; e l'arco FAH è il luogo de' punti A , vertici degli angoli YAZ , i di cui lati AY , AZ passano sempre per gli punti F , H ; come anche l' altro cerchio DKT è il luogo de' punti B , centri de' circoli BDR , che passano sempre per D . Adunque il proposto problema si convertirà nell' altro di: *Adattare fra i circoli FAH , DKT dati di grandezza e di sito la linea retta AB , sicchè unita FA , l'angolo FAB pareggi un dato*; e quindi risolverassi per mezzo del Porisma III.

SCOLIO.

400. Lo stesso problema di poc' anzi potrebbe ricevere un' altra soluzione più generale, perchè può estendersi a due rette ed una qualunque curva.

Dato di posizione un angolo rettilineo, ed una qualunque curva, bisogna applicare tra esse un triangolo dato di specie e di grandezza, in modo che gli angoli del triangolo sieno sulle tre linee date.

SOLUZIONE.

Essendo dato di specie il triangolo ADC (fig. 125) che sia applicato nel modo già detto tra le due rette

BA, BC, e la curva GDE, dovranno esser dati l'angolo DAC, ed i lati AD, AC che lo comprendono; e facendo al punto B della CB l'angolo CBL uguale al dato CAL, sarà data di posizione BL. Oltre a ciò unito il punto C coll'altro L ove tal retta incontra la DA, pe' quattro punti C, A, B, L potrà passarvi un cerchio, essendo uguali gli angoli CAL, CBL: e sarà dato l'angolo ACL come complemento a due retti dell'angolo dato ABL. Adunque sarà dato di specie e di grandezza il triangolo ACL, che ha per base la data AC, e nel quale sono puranche dati gli angoli ACL e CAL ad essa adjacenti: onde vi dovrà esser dato il lato AL, e la rimanente LD. Or essendo data la retta linea AL sottesa del dato angolo ABL, il luogo del punto D dee essere un'ellisse data di sito e di grandezza. Dunque l'intersezione di questa curva coll'altra EDG, ch'è data, dovrà segnarvi i punti soddisfacenti al Problema.

PROBLEMA IV.

401. *Dati di sito i tre circoli DKM, FYX, HNQ (fig. 126); adattare tra i medesimi il dato quadrilatero ABCE in modo, che il vertice A dell'angolo BAE sia nella circonferenza del cerchio DKM, ed i lati BC, CE tocchino rispettivamente i cerchi FYX, HQN.*

SOLUZIONE.

Siasi di già applicato un tal quadrilatero nel modo che si cerca, ed i centri D, F, H de' dati circoli giungansi colle DF, FH, HD. Indi per F, H s'intendano condotte le XY, VZ rispettivamente parallele alle BC, CE; saranno queste parallele i rispettivi luoghi de' punti F, H centri de' circoli FXY, HQN,

i quali toccano sempre rispettivamente le rette BC , BE . Finalmente si concepisca descriversi col centro A , intervallo AD il cerchio ADK , che sarà il luogo de' centri D de' circoli DKM , che passano sempre per A .

Or essendo date di sito le rette XY , VZ e'l circolo ADK ; e ritrovandosi il dato triangolo DFH situato in modo, che gli angoli del medesimo F , H , D toccano rispettivamente le suddette linee; il presente problema ridurrassi ad: *Adattare il dato triangolo FHD tra le rette di sito XY , VZ e'l circolo ADK dato anche di sito e di grandezza, sicchè gli angoli F , H , D di quello giacciono rispettivamente sopra di esse linee rette, cioè al Probl. III. (399).*

PROBLEMI DEL SECONDO GENERE.

PROBLEMA V. (*)

402. *Date di posizione le quattro linee rette AB , AD , DB , CI , (fig. 127), applicarvi un quadrilineo simile al dato $FGHI$, sicchè gli angoli F , G , H , I giacciono in esse rispettivamente.*

SOLUZIONE.

Facciasi sopra FG il segmento $FaKG$ capiente l'angolo dato BAD : sulla FH il segmento $FbKH$ comprendente gli angoli uguali a DBC : e finalmente sulla FI l'altro segmento $FcaI$, che comprenda gli angoli uguali al dato C . Ciò posto s'intenda tirata dal punto

(*) Questo Probl. è il Lemma XXVII. de' Principj Matematici del Newton.

F la retta Fc , i cui segmenti ab , bc tagliati dagli archi de' tre descritti circoli sieno fra loro come $AB:BC$. E questo otterrassi col seguente metodo. Essendo dati i punti F , K ove si tagliano i primi due segmenti, sarà data la retta FK , e quindi tanto il segmento FaK , che l'altro FbK . Adunque il triangolo aKb è dato di specie; e perciò di ragione ab a bK : ma è pur data la ragione di cb a ba . Quindi sarà data la ragione di cb a bK , e per conseguenza il triangolo cKb è ancor dato di specie. Laonde sarà dato l'angolo bcK . Per lo che se sopra FK si formi un segmento capiente un angolo uguale a bcK , che tagli l'arco FcK in un punto c ; questo punto sarà il richiesto.

Si tiri dunque per c la retta Fc ; ed indi giungansi le rette Gad , Hbd , Ic ; sarà la posizione di queste quattro linee rette Fac , Gad , Hbd , Ic simile a quella delle date fAC , gAD , hBD , iC . Finalmente si faccia $ba:aF::BA:Af$; di più $da:aG::DA:Ag$, ec. e si uniscano i punti f , g , h , i per mezzo delle fg , gh , hi , if ; sarà il quadrilineo $fghi$ simile ad $FGHI$, ed applicato in mezzo alle rette date nella maniera richiesta.

P R O B L E M A VI.

403. *Date di posizione le due linee rette LN, LN (fig. 128 n. 1.), e 'l punto P fuori di esse, menare alle sottoposte linee rette due altre PM, PN, che faccian seco un angolo uguale ad un dato, e sieno tra loro in una data ragione.*

S O L U Z I O N E.

Facciasi l'angolo FAG (fig. 128 n. 1 e 2.) uguale al dato, e che i suoi lati sieno nella data ragione. Indi giungasi la linea retta PL , e si descriva sopra di AF il segmento

circolare AKF, che comprenda angoli uguali a PLM, e sopra di FG (linea retta che unisce i punti F, G) l'altro segmento FHG, tal che gli angoli in esso compresi adeguino MLN. Si tiri la linea retta EA, e troncata AB uguale a PL, si conducano BD, BC parallele ad EF, EG, e giungasi DC. Finalmente si taglino LM, LN rispettivamente uguali a BD, BC, e si uniscano PM, PN: saranno queste nella data ragione, e comprenderanno l'angolo dato.

S C O L I O

404. Da questa soluzione si può fare facilmente dipendere quella del seguente altro

P R O B L E M A.

Poste le medesime cose del Problema precedente, si vogliano tirare dal dato punto P (fig. 138 n. 1) fuori l'angolo NLM le due linee rette PM, PN, che facciano tra loro un dato angolo, e congiunta NM, il triangolo NPM stia alla somma de' quadrati di PM e di PN, come R a T.

A N A L I S I G E O M E T R I C A

S' intenda prolungata NP in m , sicchè sia $Pm = PM$. E perchè il rettangolo mPN sta al triangolo MPN , a cagione dell'angolo dato MPN , in una costante ragione, cioè di una qualunque linea retta S alla linea retta R ; e come R a T , così dee stare il triangolo MPN alla somma de' quadrati di mP e di PN ; sarà, per equalità ordinata, $mPN : mP^2 + PN^2 :: S : T$, e quindi $2mPN : Pm^2 + PN^2 :: 2S : T$; ed invertendo e componendo $mN^2 : 2mPN :: T + 2S : 2S$: sarà dunque data la ragione di mN a PQ ; e quindi la ragione di mP , ovvero di MP a PN ; che perciò questo problema si ridurrà al precedente

C A P. XXI.

DI QUE' PROBLEMI DI SITO CHE RISOLVONSI PER MEZZO
DI LEMMI.

405. Moltissimi difficili problemi di sito, pe' quali nessun sentiero conducente alla loro soluzione è riescito ritrovare, malgrado gli sforzi ed i tentativi, che dal geometra inventore ed esercitato si sieno fatti, possono in agevol guisa restar risolti per mezzo di qualche lemma che si rinvenga all'uopo; al che ottenere conviene ponderare attentamente, or la natura del problema che si vuol risolvere, ed or le conseguenze che derivansi dal suppor fatto ciò che in esso ricercasi. E siccome queste tali cose o affatto, o con difficoltà grandissima si mostrano nella tela di un calcolo analitico, sebbene maestrevolmente eseguito: è perciò che il tentare questi tali problemi col puro calcolo algebrico, riesce inutil cosa, o difficile oltremodo. Ed a ciò che si è detto potrà servir di prova il problema del cerchio e de' tre punti proposto dal celebre Cramer, che più giù risolveremo, e del quale potrà leggersene la storia ed i tentativi fatti per risolverlo da' più insigni Analisti moderni negli *Opuscoli Matematici della Scuola del Sig. Fergola*.

In questo metodo di proceder per lemmi nella soluzione de' problemi di cui parliamo, gli antichi dovettero oltremodo distinguersi, senza di che le *Collezioni Matematiche di Pappo* non ci presenterebbero ancora un gran numero di lemmi, che a proposito usati conduconci talvolta dal più profondo bujo in pieno

meriggio, per la soluzione di molti de' suddetti problemi, nè tanta importanza troveremmo da essi data ai porismi dell'accuratissimo Euclide, come già altra volta dicemmo.

Intanto perchè ciò che qui si è generalmente indicato ognun vegga col fatto, proporrò in questo Cap. alcuni problemi di Sito, che vedransi poi, nella maniera poc' anzi indicata, elegantemente risolti.

PROBLEMA I. (*)

406. *Nel dato cerchio EDG (fig. 130) inscrivere il triangolo DEF, i di cui lati distesi passino pe' tre punti dati A, B, C.*

METODO DEL SIG. GIORDANO

LEMMA

407. *Se dagli estremi A, B (fig. 129) della retta AB data di posizione, s'inflettano ad uno stesso punto D della circonferenza DEG le due rette AD, BD, e poi da un punto E delle loro sezioni E, F conducasi la EG parallela alla data AB; la retta che congiunge l'altro punto F coll'estremo G dell'anzidetta parallela, dovrà sempre incontrare in un dato punto H la retta AB.*

Dim. Imperocchè i due triangoli FHB, DAB, che han di comune l'angolo in B, han pure uguali i due angoli BHF, ADB, come uguali al terzo EGH; adunque sarà $BF : BH :: AB : DB$, e'l rettangolo ABH uguale al dato DBF. Onde sarà dato il punto H.

(*) Proposto dal Cramer.

ANALISI GEOMETRICA DEL PROBLEMA.

408. I. Sieno A, B, C (*fig. 130*) i tre punti dati, ed EDF il triangolo richiesto. Dal punto E conduca-si la EG parallela alla data AB , e vi si unisca la GF . Questa retta, in virtù del Lemma precedente, dovrà passare per lo dato punto H della AB .

II. Giungasi la linea retta HC , alla quale si tiri per E la parallela EI , e si unisca la IG . Anche quest'altra retta dovrà, per lo stesso Lemma, passare per lo dato punto K della HC .

III. Ed essendo date di posizione le rette EG , ed EI , che son parallele alle date AB , HC , sarà dato l'angolo GEI , ch'esse comprendono: e ne sarà benanche dato il suo duplo GLI , congiungendone i due raggi LG , LI , e la LK . Il perchè sarà puranche dato l'angolo LGI alla base del triangolo isoscele GLI , e quindi il suo conseguente $L GK$.

Adunque il Problema si è ridotto a descrivere sulla data linea retta LK un segmento di cerchio capiente un angolo dato.

METODO DEL SIG. CASTIGLIONE. (*)

L E M M A

409. Se dal punto G (*fig. 131*) preso nel diametro prodotto AB del cerchio AFB , si tiri ad esso una qualunque secante EG , e dal punto E , ch'è una del-

(*) La soluzione del Castiglione non è in verità sì semplice come quella che qui, e negli Opuscoli si è recata; avendola sgravata di molte ricerche, che v'erano inutili.

le due sezioni, si conduca l'ordinata ED ad un tal diametro; la retta DF , che unisce l'altro estremo D di cotesta ordinata coll'altro punto F delle sezioni, dovrà sempre incontrare il detto diametro in un dato punto H .

Dim. Si uniscano le rette DA , AE , AF . Ed essendo DE perpendicolare al diametro AB , sarà l'angolo DAB uguale all'angolo BAE . Ma l'angolo DAB è uguale all'angolo HFB , poichè sono nella stessa porzione di cerchio; e l'angolo BAE è uguale all'angolo BFG per lo quadrilatero $BAEF$. Adunque l'angolo HFB è uguale all'angolo BFG , e con ciò dee essere $GF : FH :: GB : BH$.

» Ciò posto tirisi la HX parallela alla EF , sarà
 » l'angolo HXF uguale all'alterno EFA , o sia ad
 » AFD , essendo gli archi AE ed AD uguali; e per-
 » ciò HX sarà uguale ad HF . Ma pe' triangoli simili
 » AGF , AHX , è $AG : AH :: GF : HX$ o FH ;
 » ed è poi $GF : FH :: GB : BH$; quindi sarà $AG :$
 » $AH :: GB : BH$, e la AG divisa armonicamente in
 » H e B (*).

ANALISI GEOMETRICA DEL PROBLEMA.

410. I. Sieno A , B , C (fig. 131) i tre punti dati, ed EDF il triangolo richiesto. Dal punto F si tiri la FG parallela alla data AB , e giungasi la EG .

(*) La dimostrazione dell'esposto lemma di Pappo ritrovasi mutilata nel testo: l'accortissimo Commandini si contentò di sostituirla con una indiretta, ed il nostro Sig. Pergola nel recare un tal lemma negli Opuscoli Matematici, ne completò la dimostrazione sulle orme medesime del Geometra Greco.

Questa retta in virtù del Lemma recato al n. 407 dovrà passare per un dato punto K della AB.

II. Si unisca il centrò L del dato cerchio col detto punto K; e sulla LK si abbassi dal punto G la perpendicolare GRO, e poi giungasi la OE. Contest'altra retta, per lo Lemina precedente, dovrà segnare il dato punto Q nel diametro NM.

III. Ciò posto, essendo date di posizione le due linee rette GF, GO, sarà dato l'angolo OGF, o il suo uguale OEF. Ma i lati di questo secondo angolo passano rispettivamente pe' dati punti Q, C. Adunque il Problema vedrassi ridotto a costituire sulla retta QC un segmento di cerchio capiente un angolo dato.

PROBLEMA II.

411. *Nel dato cerchio DFG (fig. 133) inscrivere il triangolo DEF, di cui due lati DE, DF passino per due punti A, B, e per l'altro C la retta FC, che col terzo lato EF costituisca un dato angolo in F.*

ANALISI GEOMETRICA.

Si tiri ad AB la parallela EG, e giungasi GF; questa segnerà in AB il dato punto H. Si unisca la HC, e dividasi in K, sicchè il rettangolo KHC adequi il dato FHG: e congiunta la KG, distendasi la medesima in I, e si tirino le linee rette EI, LG.

E perchè sono simili i due triangoli HKG, HFC, che hanno l'angolo GHG di comune, ed i lati d'intorno ad esso proporzionati, saranno uguali i due angoli HKG, HFC. Ma questo coll'angolo EFH, o sia EIG costituisce un dato angolo EFC. Onde sarà data la somma de' due angoli HKI, EIK; e perciò se produ-

cansi le rette EI , HC , queste incontrandosi, dovranno costituire un dato angolo. Or le rette HC , HB son date di posizione; adunque ancora EI incontrando la AB dee formare con essa un dato angolo. Ma questo poi è uguale all'altro IEG , a cagione delle parallele EG , AB . Quindi è dato un tale angolo IEG , e conseguentemente l'altro LGK , e 'l punto G . Ed il problema proposto potrà facilmente comporsi.

412. *Scol.* I due seguenti Problemi si possono risolvere con un artificio simile a quello del precedente. Le loro soluzioni si ritrovano recate dal Sig. Giordano a disteso nel *Vol. IV.* degli *Atti della Società Italiana*; e ne' nostri Opuscoli vi si potranno leggere altre ricerche affini a questo argomento.

I. *In un dato cerchio incrivere un triangolo, di cui un lato passi per un dato punto; e per gli altri due punti dati vi passino linee rette, che co'due rimanenti lati costituiscano angoli dati a' loro estremi.*

II. *In un dato cerchio inscrivere un triangolo, sicchè condotte da tre punti altrettante linee rette a due degli angoli del medesimo, queste comprendano co' rispettivi lati angoli dati.*

PROBL. III. GENERALE

413. *Nel dato cerchio MNP (fig. 134) inscrivere il poligono $MNOPQ$ di tanti lati, quanti sono i punti dati A , B , C , D , E , pe' quali quelli debbon passare.*

METODO DEL SIGNOR GIORDANO

ANALISI GEOMETRICA.

Uniscasi la AB , alla quale s'intenda condotta per M la parallela MR , e giungasi ROH . Similmente si unisca la HC , e tiratavi per R la parallela RS , giungasi SPK . E di nuovo unita la DK le si tiri per S la parallela ST , e giungasi TQX . Indi si unisca EXY , alla quale si tiri per T la parallela TV , e giungasi VMY . E così si continui a fare se vi sieno più punti dati. Saran dati gli angoli MRS , RST , STV *ec.* del poligono $MRSTV$, come quelli che pareggiano rispettivamente i dati AHK , HKX , KXY *ec.* Se dunque è pari il numero de' lati MR , RS , ST , TV *ec.* di questo poligono (il che ha luogo quando la figura da inscrivere ha un numero impari di lati), comprendendo angoli dati il primo di essi lati MR col secondo RS , il terzo ST col quarto TV *ec.*, sarà dato l'intero arco $MRSTV$ *ec.*, e quindi la sua sottesa MV ; e perciò anche il punto M , dal quale poi tutti gli altri V , O , P , Q , *ec.* restan facilmente determinati.

Che se poi il poligono $MNOPQ$ *ec.* da inscrivere abbia un numero pari di lati, sarà impari quello delle linee rette MR , RS , ST , TV *ec.*; e quindi la MV non verrà ad essere la sottesa di un arco dato. Intanto in questo caso, essendo pari il numero delle linee rette RS , ST , TV , *ec.*, sarà dato l'arco $RSTV$ *ec.*, e quindi l'angolo RMV ; e perciò distesa YMV in F , sarà anche dato, per le parallele RM , AB , l'angolo VFA ; ond'è, che anche in questo caso resterà determinato il punto M .

COMPOSIZIONE GEOMETRICA

Il primo caso di questo Problema si riduce ad *inclinare da un dato punto ad un cerchio una linea retta, sicchè l'intercetta sia data, cioè a ritrovar due linee rette reciproche a due date, che abbiano una data differenza.* E l'altro alla 23. El. 1., ond'è che la sua composizione geometrica è manifesta.

METODO DEL SIGNOR SCORZA

PORISMA.

414. *Se da due punti dati A, B (fig. 135, e 136) inflettansi alla periferia del dato cerchio DEG le linee rette AE, BE, che di nuovo lo incontrino ne' punti D, F; dovrà la linea retta DF delle loro intersezioni formare in un suo estremo un angolo dato con un'altra tendente ad un punto dato.*

Dim. Si tiri dal punto D la DG parallela ad AB, che ne congiunge i dati punti A, B; e di poi si unisca la GF, che segnerà nella linea retta AB il punto dato H (tem. n. 407), e questo punto dato H giungasi col centro C del cerchio mediante la linea retta HC, cui si abbassi la perpendicolare GM, che incontri la circonferenza nel punto I; e si unisca la FI, la quale ne incontrerà il diametro nel dato punto K (tem. n. 409). Ciò premesso, l'angolo DGI è dato, avvegnachè formato da due linee rette DG, GI, date di sito. Adunque sarà dato del pari il suo uguale, ovvero il supplemento a due retti DFI, ch'è formato dalla linea retta DF delle intersezioni delle due rette inflesse, coll'altra FI tendente al dato punto K.—C. B. D.

Ciò premesso il Sig. Scorza reca al proposto problema (n. 413) la seguente elegantissima

ANALISI GEOMETRICA.

415. Suppongasi nel cerchio dato FGI (*fig. 137*) inscritto il richiesto poligono FGHK, i cui lati passino rispettivamente pe' punti dati A, B, C, D, *ec.* . E poichè il primo lato FG di esso poligono, ed il secondo GH deggion passare pe' dati punti A, B, dovrà la linea retta FH delle loro intersezioni formare ad un suo estremo l'angolo dato FHN colla linea retta HN tendente al dato punto *h* (*par. prec.*); e sarà dato l'arco FN. Ma cotesta linea retta HN inflettesi col terzo lato HI, che dee passare pel punto dato C. Laonde, per lo stesso Porisma, la linea retta delle intersezioni NI formerà ad un suo estremo un angolo dato NIO colla linea retta IO tendente al dato punto *i*; e sarà dato l'arco NO, e con ciò l'altro FO, che sarà somma, o differenza de' dati archi FN ed NO. Così pure questa linea retta tendente IO inflettesi col quarto lato IK del poligono. Dunque la linea retta OK delle sezioni formerà ad un suo estremo un angolo dato coll'altra KP tendente al dato punto *m*; e sarà dato l'arco OP, e quindi l'altro FP, che sarà pure somma, o differenza de' due archi dati FO, ed OP. E così appresso, finchè si pervenga ad una tendente PK, la quale inflettesi coll'ultimo lato KF del poligono. In tal caso sarà dato l'arco sottoposto PF, e con ciò l'angolo alla circonferenza FKP, ed il suo conseguente EK*m*.

Dunque si ridurrà il Problema a descrivere sulla data linea retta Em una porzione di cerchio capiente quell'angolo dato.

416. *Cor.* Il Problema del cerchio e de' tre punti resta immediatamente risoluto dal Porisma.

417. *Scol.* Il Sig. Professore Scorza avverte qui molto a proposito in qual caso il problema del cerchio e de' tre punti, o l'altro generale poc' anzi risoluto, sia indeterminato; lo che altri prima di lui non aveva fatto (*Vegg. gli Opuscoli ec.*).

P R O B L E M A IV.

418. *Dato il cerchio minore ABCD (fig. 138) in un emisfero, dividerlo in un dato numero di archi AB, BC, CD, DA, ec. sicchè i cerchi massimi condotti per gli estremi di ciascheduno, passino per altrettanti punti dati G, H, I, K, ec. nella superficie di esso emisfero.*

A N A L I S I G E O M E T R I C A.

Suppongasì diviso il dato cerchio ABCD nel modo richiesto. E poichè il primo arco AB è tale, che il cerchio massimo condotto pe' suoi estremi A, B dee passare pel dato punto G; il raggio OG disteso dovrà incontrare il proposto piano in un punto *g*, che sarà dato. Ed un tal punto essendo sì nel piano del cerchio ABCD, che dell'altro GBA, dovrà trovarsi nella comune sezione di essi, cioè nella AB. Adunque la corda AB del primo arco dee passare pel punto dato *g*. Lo stesso s'intenda delle corde degli altri archi successivi BC, CD, DA, ec., che deggion pure passare rispettivamente pe' punti dati *h, i, k ec.* Adunque il Problema si riduce ad inscrivere nel dato cerchio il poligono ABCD, i di cui lati AB, BC, CD ec.

passino per altrettanti punti dati g, h, i, k , ec. cioè al problema poc' anzi risoluto (*).

419. *Scol.* Questo Problema geometrico potrebbe convertirsi in un altro geografico assai leggiadro, dal quale potrà rilevarsi l'utilità di tali speculazioni; cioè: *Dato un parallelo terrestre, ed un numero n di luoghi nell'istesso emisfero, si vuol dividere tal cerchio nel numero n di archi, sicchè i cerchi massimi condotti per gli estremi di ciascheduno passino pe' dati luoghi rispettivamente.* E volendo rendere più universale quel geometrico Problema, si potrà enunciar quest'altro. *Dato un cerchio in un qualunque solido di rivoluzione, ed il numero n di punti nella superficie di esso; dividere tal cerchio nel numero n di archi, sicchè le sezioni che conduconsi per gli estremi di ciascun arco, e per un dato punto nell'asse dello stesso solido, passino co' loro perimetri per que' punti dati rispettivamente.* In simil guisa: *Dato un cono, ed il numero n di punti nello spazio, si potrebbe addimandare d'inscrivere in questo solido una piramide del numero n di lati, le di cui facce passino per que' punti rispettivamente.* O, *dato un cilindro, ed il numero n di punti nello spazio, vuol inscrivervi in esso un prisma anche del numero n di lati, sicchè le facce di tal solido passino per que' punti rispettivi.* E così di altri.

(*) Il sommo Eulero indicò la risoluzione di questo Problema per tre punti dati nella superficie dell'Emisfero. Ma tal indicazione è assai oscura, come può vedersi da questo ragionamento tratto da una sua Memoria dell'Accademia di Pietroburgo 1780. *Concipiatur planum sphoeram in centro circuli tangens, super quo triangulum planum modo praescripto jam sit constructum, ejusque translatio ad superficiem sphoerae erit facilissima, cum anguli circa centrum in superficie tam plani, quam sphoerae sint idem distantiae vero punctorum datorum, et angulorum trianguli a centro sphoerae in tangentes abeant.*

L E M M A .

Necessario alla soluzione del seguente Problema.

420. *Se ad un arco circolare DNE (fig. 139) tirisi comunque una tangente AB, la quale si arresti tra le altre due tangenti DF, EF dell'arco stesso ne' suoi estremi D, E, e poi congiungasi il centro C co'punti A, B ove questa tangente incontri quelle; l'angolo ACB sarà sempre di una costante grandezza.*

Si tirino a'contatti D, E le linee rette DC, CE; saranno perfettamente uguali i due triangoli DCA, ACN, onde l'angolo DCA sarà uguale all'altro ACN. Nella stessa guisa si mostra esser l'angolo NCB uguale all'altro BCE. Onde l'angolo ACB sarà metà del dato DCE, e perciò di una costante grandezza.

P R O B L E M A V.

421. *Ritrovare un punto nell'arco circolare DNE, siechè per esso condotta la tangente ANB in mezzo alle altre due date DF, FE, sia dato il rettangolo ANB.*

$$\text{Sia } AB = 2x$$

$$\bullet \quad CN = a$$

Ed il rettangolo $ANB = b^2$

$$\text{sarà } NO = \sqrt{x^2 - b^2}$$

$$AN = x - \sqrt{x^2 - b^2}$$

$$NB = x + \sqrt{x^2 - b^2}$$

$$AC = \sqrt{a^2 + 2x^2 - b^2 - 2x \sqrt{x^2 - b^2}}$$

$$CB = \sqrt{a^2 + 2x^2 - b^2 + 2x \sqrt{x^2 - b^2}}$$

$$AC \times CB = \sqrt{[(a^2 + 2x^2 - b^2)^2 - 4x^2 + 4b^2x^2]}$$

$$= \sqrt{[(a^2 - b^2)^2 + 4a^2x^2]}$$

Finalmente, sarà il triangolo $ACB = ax$

Or essendo dato l'angolo ACB, come si è mostrato, sarà data la ragione del rettangolo di AC in CB al triangolo ACB, che esprimasi per $m : n$, e perciò sarà

$$\sqrt{[(a^2 - b^2)^2 + 4a^2x^2]} : ax :: m : n$$

cioè $(a^2 - b^2)^2 + 4a^2x^2 : a^2x^2 :: m^2 : n^2$

e quindi $\frac{m^2 a^2}{n^2} x^2 = (a^2 - b^2)^2 + 4a^2 x^2$

la quale equazione convenevolmente maneggiata darà una linea retta quanto la AB, sulla quale se formisi un segmento circolare capiente l'angolo dato ACB, ed in esso poi si adatti la perpendicolare uguale al raggio del circolo; saranno i segmenti della sua corda rispettivamente uguali alle tangenti AN', NB, ovvero alle altre AD, BE, e sarà quindi risoluto il problema.

LE M M A

Necessario alla risoluzione del seguente Problema.

422. Se ne' lati TE, RE (fig. 140) del triangolo TER prendansi le due parti TD, RG nella data ragione di $m : n$, accanto la base RT, e nella stessa ragione prendasi pur anche DE ad EF; l'interposta GF o sarà nulla, o pure di una costante grandezza.

Imperocchè se la ragione di $m : n$ pareggi quella di TE : ER, l'intermedia FG sarà nulla, come chiaramente rilevasi. Ma se la data ragione non adeguasse quella di TE : ER, facciasi TE : RQ :: $m : n$, e quindi come TD : RG; sarà perciò TE — TD : RQ — RG :: $m : n$:: DE : EF, cioè DE : GQ :: DE : EF, e quindi GQ = EF, donde si rileva essere GF uguale alla data EQ.

PROBLEMA VI.

423. Dato il punto *B* fuori del triangolo *TER*; tirare la linea retta *BG*, che dai lati *TE*, *ER* ne ascinda, accanto la base, le due parti *TD*, *RG* nella data ragione di *m* : *n*.

ANALISI GEOMETRICA.

Suppongasi tirata la *BG* come si addimanda, e prendasi $DE : EF :: m : n$; sarà data di grandezza l'intermedia *FG*; ed unita *DF* sarà dato l'angolo *DFE*. Finalmente si tirino per *B* le linee rette *BA*, *BC* parallele rispettivamente a *DE*, *DF*.

E poichè sta $AG : GE :: AB : ED :: AC : EF$; sarà permutando $AG : AC :: GE : EF$, e dividendo $CG : AC :: GF : EF$. Adunque le due linee rette ignote *CG*, *EF* hanno la data differenza $CE + FG$, e sono poi reciproche alle date *AC*, *GF*. Che perciò è data ciascuna di esse *CG*, *EF*.

424. *Scol.* Questo problema forma l'oggetto principale del libro del luogo di risoluzione detto *de Sectione rationis* appartenente ad Apollonio Pergeo, ove trovasi risoluto in tutti i casi, e con quell'estensione che usavano gli antichi nella risoluzione de' problemi.

C A P. XXII.

ALTRO METODO DEL SIG. FERGOLA PER RISOLVERE ALCUNI
PROBLEMI DI SITO, DETTO DI TRASFERIMENTO.



425. Allorchè ne' problemi di sito proponesi a:
*Formare in un dato punto un angolo rettilineo uguale
ad un dato, sicchè sia data una funzione de' suoi lati
prodotti, finchè incontrino due linee date di sito, ed in
altri casi analoghi, come tra poco vedremo, propo-
nensi dal Sig. Fergola un nuovo metodo per ben con-
durre a fine la soluzione di simili problemi, fondate
sopra di un movimento immaginario, ch'è contenuto
nel seguente semplicissimo*

PRINCIPIO DI TRASFERIMENTO.

426. *Sien date di posizione le due linee CB, CA
(fig. 141), e 'l punto P: tirata comunque da esso
punto la retta PA, se volgasi l'angolo PAC, sicchè
abbiasi d'ella medesima PA descritto un angolo uguale
al dato X, sarà dato alla fine di tal movimento il sito
della linea mobile CA rispetto all'immobile CB.*

Imperocchè le linee date di posizione sieno linee rette, e s'interseghino in C: si unisca la linea retta PC, e 'l triangolo CPA trasferiscasi nel sito cPa, quando la linea retta PA abbia col divisato moto rotatorio descritto l'angolo APa uguale al dato X. Ciò posto, l'an-

angolo CPA pareggia, o piuttosto è identico all'altro cPa ; adunque tolto da essi il comune CPa , resta APa uguale a cPC . Ma l'angolo APa è uguale al dato X : adunque è ben anche dato l'angolo cPC . Ed essendo dati di grandezza sì l'angolo Pca , che la linea retta Pc , sarà dato di posizione il punto P rispetto alla linea retta ca .

427. E questo stesso ragionamento si potrà adoperare, quando la mobile CA sia una curva, o quando tali sieno tutte due le CA , CB date di posizione.

428. Per mezzo di questo principio l'intera famiglia di problemi sopra indicata (425) si riduce, come facilmente si rileva, e come vedrassi dalle soluzioni di que' problemi che recheremo qui appresso, a: *Tirare da un punto dato a due linee date di sito una retta, le cui parti tagliate da quelle linee abbiano data la proposta funzione.*

429. Che se fosse data una linea e non già un punto, e quivi ne abbisognasse formare con certa legge angoli dati nella loro somma, o nella loro differenza; o si proponessero altre simiglianti condizioni, il Sig. Fergola ne avverte molto a proposito, che riuscirà anche conducentissimo al Geometra il trasferir di sito certe principali grandezze del problema propostogli, perchè gli si additi qualche sentiero che conduca sicuramente alla soluzione.

430. I vantaggi che ci presenta questo metodo sono, come lo stesso nostro distintissimo Geometra cel dice, che i dati di sito de' problemi della prima famiglia sopra indicata (425) si travestono per mezzo di questa geometrica trasformazione in dati di grandezza e di ragione, e quindi riduconsi all'impero della moderna analisi. E gli altri problemi di cui si è discorso nel

n. 429, quantunque in simil guisa maneggiati non ricevano pronta soluzione, si trasformano non per tanto in mille modi; onde si generano non pochi problemi affini, che differendo nella sola enunciazione, convengono tutti e nel grado cui ascendono, e nel nodo che comprendono. E quel che molto convien valutare si è, che ogni qual volta, per mezzo del divisato metodo si riesca a sciorre tal nodo in un di essi problemi, lo che non di rado avviene, si vengono ad ottenere compite soluzioni anche degli altri affini.

PROBLEMA I.

431. *Dato il punto P fuori del triangolo CMN (fig. 141), condurre per esso le due rette PB, PA, che quivi comprendano un angolo rettilineo uguale al dato X, e tolgano da' lati CM, CN le parti BM, AN accanto la base, proporzionali alle date m, n.*

ANALISI GEOMETRICA

Si unisca la retta PC, e s'intenda il solo triangolo PAC volgersi con moto angolare dintorno a P, finchè l'angolo descritto da PA ne' paraggi il dato X, rimanendo immobili CM e PB. Sarà dato di sito il punto P rispetto alla trasferita *cn* (426), e la retta mobile PA resterà adattata sull'immobile PB. Laonde riducesi il problema a tirare dal dato punto P una linea retta alle due date CM, *cn* terminate ne' punti M ed n, sicchè BM stia ad *an* nella ragione di *m* ad *n*.

COMPOSIZIONE GEOMETRICA.

Constr. Facciasi al dato punto P della retta PC l'angolo CPc uguale al dato X , e Pc uguale alla data PC , che dal punto dato si conduce all'intersezione delle rette date. Si formi parimente all'estremo c della retta Pc l'angolo Pcn uguale al dato PCN , e si tronchi cn uguale alla data CN . Dal punto P si tiri la retta PB , che incontrando le due date CM , cn ne' punti B , a ne tolga le parti BM , an proporzionali ad m , n (473). Finalmente si costruisca al punto P della retta PB l'angolo APB uguale al dato X . Saranno CM , AN nella data ragione di m ad n .

Dimostr. L'angolo CPc , per costruzione, è uguale ad APB ; adunque aggiugnendo loro di comune l'altro CPB , n'emergerà l'angolo cPa uguale all'angolo CPA . Ma si è fatto eziandio l'angolo Pca uguale al dato PCA , e Pc uguale PC ; sarà dunque ca uguale a CA ; e quindi la rimanente an uguale alla rimanente AN , mentre sono anche uguali le intere cn , CN . E poichè per costruzione si è fatto $BM : an :: m : n$, sarà anche $BM : AN :: m : n$; ma è pure l'angolo BPA uguale al dato X . Adunque dal punto P dato alle rette date CM , CN sono state condotte le altre due linee rette PB , PA colle condizioni stabilite nel Problema.

432. *Scol.* Collo stesso artificio si potrebbero risolvere altri problemi affini, come per esempio: *Formare al punto dato P un angolo dato APB , sicchè estendendosi i suoi lati alle rette date di posizione CM , CN , sia data la somma di PB e di PA , o la loro differenza, o il loro rettangolo, o altra di loro funzione.*

E come ognun vede si potrà sempre nella compo-

sizione del problema occultare il principio di trasferimento che ha servito a risolverlo, come si è praticato qui sopra; sicchè un tal principio il quale non ha niente altro di meccanico se non che la semplice maniera di esprimerlo, ciò non ostante nè meno si mostri nella costruzione e dimostrazione di tali problemi.

PROBLEMA II.

433. *Dati di posizione i due punti A, B (fig. 142), e la retta DE; ritrovare in essa un punto C, sicchè condotte le rette AC, CB, la differenza degli angoli ACD, BCE, sia uguale al dato angolo X.*

SOLUZIONE.

Si cali dal punto B la retta BE perpendicolare alla data DE, e'l triangolo rettangolo CBE si aggiri dintorno al cateto CE, talchè l'ipotenusa, che prima giacea al di sopra di esso cateto, ne resti poi al di sotto, come lo è il triangolo CE*b*. E si potragga AC, finchè incontri BE in F.

Ciò premesso i due angoli ACD, BCE sono rispettivamente uguali agli altri due FCE, *b*CE: adunque la differenza di questi, cioè l'angolo FC*b* sarà uguale alla differenza di quelli, val quanto dire all'angolo dato X. Per la qual cosa sarà dato l'angolo FC*b*, e'l suo conseguente *b*CA. Se dunque il punto dato A congiungasi coll'altro *b*, ch'è pur anche dato, e sulla Ab si formi un segmento circolare capiente un angolo uguale al conseguente del dato X, l'arco di esso segnerà nella linea retta DE il punto cercato C.

C A P XXIII.

PROBLEMI DIVERSI DELLE APPLICAZIONI PROPOSTI, ED
ELEGANTEMENTE RISOLUTI DAL SIG. FERGOLA.

434. Tra i libri del luogo di risoluzione degli antichi Geometri ve n'eran due di Apollonio Pergeo che seguivano quelli tanto celebri, e tanto desiderati de' Porismi di Euclide, e forse anche gli altri de' luoghi piani dello stesso Apollonio; ed essi eran detti de *inclinacionibus*, poichè i problemi che vi si risolvevano avevano generalmente per oggetto di: *Inclinare tra due linee rette date di posizione una retta data di grandezza, la quale passasse per un dato punto*, del qual problema generale n'è un caso quello da noi esposto al n. 383. E questo problema generale, come cel dice Pappo, era distinto in centoventicinque altri, che formavano il complesso de'due suddetti libri, oltre a 38 lemmi. Tali problemi, come facilmente rilevasi, e come Pappo stesso lo accenna, erano altri piani, altri solidi, ed altri lineari. I due libri di Apollonio però non par che ne contenessero alcuno di quest'ultima famiglia, sicchè la dottrina delle *Inclinazioni* restava per questa parte incompleta. Non è questo il luogo da congetturare, perchè il saggio Geometra di Perga si fosse astenuto dall'estender oltre queste sue ricerche, e basta solo il far rilevare che il nostro Sig. Fergola, nella sua dottissima opera inedita dell' *Arte d'Inventare in Matematiche*, dopo essersi convenevolmente occupato di questa parte

del luogo di risoluzione degli antichi, ha voluto anche proceder oltre in supplire l'ultima su mentovata parte de' problemi delle Inclinazioni, il che ha eseguito in modo da non solamente darci eleganti soluzioni di molti difficilissimi problemi, e di prepararne così il risolvimento di molti altri a' quali questi possono servire come principj di riduzione; ma anche queste tali soluzioni sono in nuova guisa, e sì maestrevolmente eseguite, che problemi solidi, ipersolidi, ed anche trascendenti, nulla perdendo di lor natura, risolvonsi a guisa de' Problemi Piani, col solo condurvi rette, e descrivervi cerchi. E quello che anche molto ne interessa di avvertire si è, che questi tali problemi sono di natura a non ricevere affatto soluzioni per mezzo della moderna analisi, o pur quella, che col massimo stento per talun di essi si può ottenere, quando siasi ostinato a così volerla, conduce a risultati inconstruibili, e perciò di nessun conto ove trattasi di geometriche ricerche.

Or io non soffrendo, che sì nobil ramo di artifizj geometrici, atto ad estender non poco il poter di questa scienza, restasse più lungo tempo ascoso, forte insistei, perchè l'autor di esso mi permettesse di pubblicarlo, al che avendolo finalmente persuaso, inserii tali sue ricerche nel volume di Opuscoli Matematici più volte da me citati. Ed or siccome la natura di sito di questi tali problemi, e la loro importanza, come poco fa diceva, in altre ricerche di simil genere, gli riconducono nell'argomento del presente Trattato, ho stimato opportuno di qui per ultimo inserirli, rinviando coloro che vorranno conoscerne il complemento a' suddetti Opuscoli.

P R O B L E M A I.

435. *Dato di posizione un angolo rettilineo, ed una qualunque curva algebrica, o trascendente; applicare tra questa curva, ed un lato di quell'angolo una retta data di grandezza, e parallela all'altro lato.*

S O L U Z I O N E

Sia EDG (*fig. 143.*) la curva data, ABC il dato angolo rettilineo, e tra BA, ch'è un suo lato, e la detta curva EDG debbasi adattare una linea retta uguale alla data M, e parallela all'altro lato BC del medesimo angolo.

Dal vertice B del dato angolo, e sul detto lato BC si tronchi la parte BN uguale alla data M, e da N poi si conduca la ND parallela all'altro lato BA di esso angolo. Se tal retta incontri la proposta curva, il Problema sarà solubile. La incontri dunque in D, e si compia dalle BN, ND il parallelogrammo ABND. Dico esser la retta AD quella che si domanda.

La verità di quest'asserzione ben si comprende dal proposto artificio: ed ognuno potrà supplirvi, che vi possano esser più punti soddisfacenti al quesito, cioè che debba esser n il più gran numero di cotesti punti, se n sia il grado dell'equazione della curva EDG; quando ella sia algebrica.

436. *Cor.* Se la linea retta da doversi applicare tra la curva EDG, e la linea retta AB debba esser data di grandezza, e debba poi passare per lo dato punto P; i punti soddisfacenti al quesito saranno marcati nella data curva EDG da una Concoide, che abbia per assintoto la data retta AB, per polo il punto

P, e per intervallo la data linea retta M. E ciò deesi assolutamente praticare, quando la data curva EDG sia trascendente.

437. *Scol.* Quando diremo esser data una qualunque curva, senza porvi altro aggiunto, dovrà intendersi, che questa possa essere algebrica di qualunque ordine, o comunque trascendente. E taluno dovrà supporvi col suo pensiero, ch' ella sia anche data di specie e di grandezza.

PROBLEMA II.

438. *Dato di posizione un angolo rettilineo, ed una qualunque curva; applicare tra questa linea, ed i lati di quell'angolo una retta parallela ad un' altra data di sito, sicchè ne resti divisa in una ragion data.*

SOLUZIONE

Sia ABC (fig. 144.) il dato angolo rettilineo: EDG la curva data: ac la retta data di posizione, cui debbasi condurre una parallela, che vi resti divisa in una ragion data dalle tre linee BA, BC, ed EDG.

La retta ac prodotta, finchè incontri i lati di quell'angolo, dividasi nel punto d in quella ragion data: e la retta Bd, che unisce i punti B, d, si prolunga insino alla data curva EDG. Quella linea retta dovrà segnare in questa curva, se il Problema non sia impossibile, i punti ad esso soddisfacenti.

Imperocchè conducendo per uno di cotesti punti D la linea retta ADC parallela alla data ac, ben si comprende dover essere $AD : DC :: ad : dc$.

439. *Cor. 1.* Al presente Problema immantinente riducesi quest' altro: *Applicare tra le proposte linee ret-*

te BA , BC , ed EDG una retta AC , la qual vi resti divisa in una data ragione, ed ella in una data ragione ancor ne divida i lati dell'angolo dato ABC , e verso del di lui vertice. Imperocchè la seconda di queste due condizioni ne dichiara dover essere la richiesta AC parallela ad una linea retta data di sito: onde un tal Problema rimettesi a quello della presente Proposizione.

440. Cor. 11. E se la retta da applicarsi fra quelle linee rette date, debba troncar da' lati dell'angolo dato le due parti AM , CN in una data ragione, e verso de' punti M , N dati in essi lati, e le parti AD e DC di cotal linea retta vi debban essere in una data ragione; il punto D dovrà alloggiarsi in una linea retta data di posizione (397). Dunque gl'incontri di questa linea retta colla data curva EDG saranno i punti soddisfacenti al Problema. E per ciascuno di essi converrà condurre una linea retta, la qual vi resti divisa dalle altre due BA , BC nella ragion proposta. E ciò è di facile ottenimento.

441. Cor. 111. Vuol disporsi infra le dette linee BA , CB , ed EDG la retta AC , che vi resti divisa in una data ragione, e vi tronchi il triangolo ABC dato di grandezza. In tal caso la seconda di queste due condizioni indica doversi il punto D appartenere ad un'iperbole di una data potenza, i di cui assintoti esser deggian le due linee rette BA , BC . Dunque, se D sia uno degl'incontri di quest'iperbole colla data curva EDG : da un tal punto si dovrà condurre la linea retta ADC , talchè le sue parti AD , DC sieno in una ragion data. Lo che facilmente può eseguirsi.

442. Cor. 1v. Propongasi di: *Adattare fra queste tre linee BA , BC , ed EDG una retta come AC parallela alla data ac , talchè il rettangolo ACD sia dato.* In quest'altro caso sarà anche dato il rettangolo di DC

in CB, per esser dato di specie il triangolo ABC. Dunque condotta per lo punto B la BQ parallela alla *ac*, e descritta un'Iperbole cogli assintoti BQ, BC, che abbia una potenza uguale al rettangolo di DC in CB, una tal curva dovrà segnare nella data EDG i punti soddisfacenti al Problema.

443. *Cor v.* Finalmente: Dal dato punto *P* vuol condursi fra le dette linee *BA*, *BC*, ed *EDG* la retta *PA*, sicchè le sue parti, che frammezzan quelle linee, cioè le *AD*, *DC*, sieno in una ragion data. In tal caso, come lo ha dimostrato il Sommo Newton nella sua Aritmetica Universale, il punto *D* appartiene ad una data Iperbole. Dunque le intersezioni di questa linea retta colla data EDG vi segneranno i punti soddisfacenti al quesito, dovendosi congiungere ciascuno di essi con quel dato punto *P* per una linea retta.

444 *Scol.* Ismaele Bulialdo, che fu il primo a rischiare i Posismi Euclidei, quivi volle risolvere il seguente Problema: Condurre un'ordinata in un semicerchio, la qual vi restasse divisa in una data ragione dal diametro, dalla semicirconferenza, e da una corda condottavi per un estremo del diametro suddetto. Or chi non vede esser questo Problema assai più ristretto di quello, che contiensi nella presente Proposizione. E si vedrà poi con maraviglia, ch'ei lo disciolse per una via men semplice della quassù tenuta. Intanto più conseguenze, o più Problemi si potrebbon trarre dall'anzidetta Proposizione, i quali si ometteranno volentieri, per poterne recare un'altro problema sopra un soggetto affine, ed il quale richiede una più artificiosa analisi.

P R O B L E M A III.

445. Dato di posizione un angolo rettilineo, ed

una qualunque curva; condurre da un punto di questa due rette date su i lati di quell'angolo, talchè esse o comprendano un angolo di data grandezza, o facciano angoli dati co' lati dell'angolo proposto da principio.

La prima parte di questo Problema è stata già risolta nel n. 400 del presente Trattato.

PART. II. Suppongansi esser dati gli angoli DCB, DAB (*fig. 125*), che forman le date incidenti DC, DA co' lati del dato angolo ABC. E poichè nel triangolo ABO son dati per supposizione i due angoli DAB, ABO, ne sarà dato il terzo, cioè l'angolo AOB, o il suo uguale COD. Ma è anche dato l'angolo DCO. Dunque vi sarà dato il terzo CDA. E la presente indagine si ridurrà a quella del caso precedente.

446. *Cor. 1.* di qui comprendesi chiaramente, come un triangolo dato di specie, e di grandezza potrebbe adattarsi fra due linee rette, ed una qualunque curva data di posizione, sicchè gli angoli di quella figura cadano su queste linee rette rispettivamente. Ed un tal Problema, è assai più generale di quell'altro, che il Sommo Newton disciolse ne' *Principj Matem. della Filos. Nat. Lemm. XXVI.*

447. *Cor. 11.* Inoltre da' Principj di risoluzione, che impiegansi nel presente Problema, si potrà risolvere un altro Problema Newtoniano più generalizzato (*), cioè: *Date di posizione due linee rette, ed una qualunque curva; applicare fra queste tre linee una retta, sicchè le sue parti interposte sieno date di grandezza.*

E la medesima Analisi basterebbe a risolverne il Porisma III. de' Probl. di Sito (387).

(*) Probl. 20. Aritm. Unjvers.

L E M M A.

448. Se diasi di posizione l'angolo NLM (fig. 145) e 'l punto C , da cui conducasi una qualunque secante CP a' lati di detto angolo, e da' punti P , R delle sezioni si tirino le rette PA , RB a' dati punti A , B posti a diritto con C ; io dico, che le due inflesse AP, BR convergan sempre in una retta data di posizione.

Il punto C , per brevità di dire, si chiamerà Polo di quell'angolo, e la retta AB di lui direttrice.

Dal punto B conducasi la BD parallela all'inflessa AP : e poi dal punto Q , ove unisconsi amendue le inflesse, si meni la EQF parallela alla direttrice AB , incontrandone in E , F i lati del dato angolo: e questi in H , G ne seghino la data direttrice. Sarà, pe' triangoli simili CBD , CAP , $CB:CA::BD:AP$.

Ciò posto la ragione di BD ad AP componesi da quelle di BD a PQ , e di PQ ad AP , come l'è noto. E la prima di queste componenti è quanto quella di BR ad RQ , pe' triangoli simili BRD , PRQ , o quanto la di lei uguale di BG a QF , per la similitudine degli altri due triangoli RBG , RQF . Adunque sarà $BD:PQ::BG:QF$. Inoltre la seconda di dette componenti, cioè la ragione di PQ ad AP , l'è pure uguale a quest'altra di QE ad AH , a cagion de' triangoli simili PHA , PEQ . Onde la ragione di CB a CA sarà composta dalle due di BG a QF , e di QE ad AH , cioè, scambiando i conseguenti di queste due altre componenti, sarà $CB:CA::(BG:AH)(QE:QF)$.

Il perchè essendo data la ragione di CB a CA , e l'altra di BG ad AH , per esserne dati i loro termi-

ni; dovrà esser benanche data l'altra ragion componente, cioè quella di QE a QF, e'l punto Q dovrassi allogare in una linea retta data di posizione, che dee passare per lo vertice L dell'angolo dato.

449. *Cor.* Discostandosi all'infinito il Polo C da ciascun de' due punti dati A, B, nel qual caso l'interposta PR divien parallela alla direttrice AB, diverrà d'uguaglianza la ragione di CB a CA; e dovrà quindi risultare $QE : QF :: AH : BG$. Onde in una più facil maniera potrà rinvenirsi in questo caso la locale LQ del concorso delle inflesse.

PROBLEMA IV.

450. *Dati di posizione un angolo, due punti, ed una qualunque curva; infletter da que' due punti a questa curva due rette, sicchè la retta, che unisce i concorsi delle due inflesse co' lati dell'angolo dato, sia parallela alla direttrice, o con essa converga ad un punto dato.*

SOLUZIONE.

I punti dati sieno A, B, NLM sia l'angolo dato, TQS quella qualunque curva, e vogliansi infletter le due AQ, BQ ad essa, talchè la PR, ch'è tra le sezioni delle inflesse co' lati di quell'angolo, sia parallela alla direttrice AB, o converga con essa nel dato punto C. Per ciò ottenere sia la linea retta LQ (*lem. prec.*) la locale de' concorsi di coteste inflesse: ed una tal linea retta incontri la data curva TQS in uno, o più punti (altrimenti sarebbe impossibile un tal Problema). Io dico, che ciascun di questi punti debba esser soddisfacente al quesito. E ciò è di per se manifesto.

P R O B L E M A V.

451. *Dato di posizione un punto, una Sezione Conica, ed un'altra qualunque curva; condurre da quel punto nella prima di queste curve due seganti, sicchè le congiungenti delle loro sezioni convergano in un punto dell'altra curva; ed oltre a ciò ne sia dato un angolo dell'emergente quadrilineo.*

S O L U Z I O N E

Il dato punto sia A (*fig. 146.*), CFED la proposta sezione conica, e BT l'altra curva data. Dal punto A conducansi le due tangenti alla sezione conica CFED, e sia LB la retta fra contatti, la quale segghi in B la curva BT. Sulla retta AB si formi un segmento di cerchio capiente l'angolo dato, o il suo conseguente, secondochè il detto angolo debba uguagliare l'angolo D, che rivolge l'apertura alla retta AB, (e lo stesso dicasi del suo opposto CFE nel quadrilineo CFED), o vi debba uguagliare qualunque degli altri due rimanenti. E supposto, che cotesto segmento incontri in D la data sezione conica, vi si conducano le linee rette AD, BD, uniscasi l'altra AE, ed in fin giungasi la CF. Questa retta dovrà convenire colle due DB, LB nel medesimo punto A, come costa da' conici. E ne resterà in tal guisa risoluto il Problema.

PROBLEMA VI.

452. *Date di posizione due qualunque curve; applicare tra' perimetri di esse una retta uguale ad una retta data di grandezza, e parallela ad un'altra data di posizione.*

SOLUZIONE.

Tra le curve date di sito ANB , QSD (fig. 147) vuol applicarsi una linea retta quanto la data R , e parallela all'altra CD data di posizione. Per ciò ottenere, la linea retta AC dinoti l'asse della curva ANB , e condotta da un qualunque punto A di tal linea retta la Aa parallela alla CD , ed uguale alla data R , si meni per a la linea retta ac parallela al detto asse. E poi d'intorno ad ac intendasi la curva anb identica alla data ANB , e similmente posta, sicchè le ordinate NM , nm , che in esse corrispondono alle uguali ascisse AM , am , non solamente sieno uguali, ma vi sieno benanche per diritto (188). Inoltre da un punto n , ove segansi le curve QSD , anb , (lo che dee assolutamente verificarsi, se tal problema sia possibile), si conduca la nN parallela alla CD : dico esser questa la linea retta addimandata.

Imperocchè essendo uguali, come ora si è detto, le due nm , NM , aggiuntavi la mN di comune, sarà l'interposta nN uguale alla mM , cioè ad aA , o alla data R . Ma è anche la medesima nN parallela alla CD data di posizione: adunque si è soddisfatto alle condizioni del problema.

PROBLEMA VII.

453. *Dato di posizione un punto, un retta, ed una qualunque curva; applicare per quel punto tra queste linee una retta, sicché le sue parti, che restano tra il detto punto, e ciascuna delle linee date, sieno in una data ragione, o vi comprendano un rettangolo dato.*

SOLUZIONE

PART. I. Il punto N (fig. 148), la linea retta AC, e la curva qualunque DFE sien date di posizione, e vogliasi per N condurre tra le dette linee una retta, come la MNF; sicché sieno le NM, NF nella data ragione di m ad n .

Dal punto N si abbassi la NB perpendicolare alla data AC, e protrattala verso la curva DFE, sinché stia $BN:NG::m:n$, si tiri per G la GF parallela alla data AC; e poi da ciascun punto F, ove tal parallela incontra la detta curva (lo che dee aver luogo, se il Problema sia possibile), si tiri al dato punto N la FNM. Sarà, pe' triangoli simili NBM, NGF, MN: NF :: BN: NG :: $m:n$.

PART. II. Si prolunghi la detta NB insino al punto Q, talché il rettangolo BNQ uguagli il dato rettangolo, che qui dinotiamo per A^2 . E poi sulla NQ, come diametro, si descriva il cerchio QFN, che dovrà in qualche punto F incontrar la data curva DFE, se sia risolvibile un tal Problema. E finalmente da F conducasi per N la retta FNM, ed insino alla data linea retta AC. Sarà il rettangolo FNM uguale ad A^2 .

Imperocché, congiunta la QF, dovranno essere equiangoli, e quindi simili i due triangoli QFN, NBM. Onde dovendo essere $QN:NF::NM:NB$, sarà il rettangolo FNM uguale a QNB, cioè ad A^2 .

455. *Scol.* Se il dato punto P sia l'intersezione della data curva ARC col cerchio BPQ (fig. 150) potrà recarsi quest'altra soluzione al presente Problema.

Conducasi per P una qualunque corda PG in detto cerchio, e prodottala in H , sicchè stia $PG : PH :: m : n$, si descriva sulla PH il segmento circolare PRH simile all'altro PQG , che intersecherà in un qualche punto R la curva ARC . Giungasi la RP , e si prolunghi insino al cerchio: sarà questa la linea retta cercata. Imperocchè, condotte le due linee rette RH , QG , ben si vede essere equiangoli, e quindi simili i due triangoli PQG , PRH . Adunque sarà $PQ : PR :: PG : PH :: m : n$.

PROBLEMA IX.

456. *Dati di sito un punto, un cerchio, ed una qualunque curva; condurre da quel punto due incidenti su queste curve, talchè esse comprendano un angolo dato, e sieno direttamente, o reciprocamente proporzionali a due linee rette date.*

SOLUZIONE.

PART. I. Dal dato punto P (fig. 149) si vogliano condurre sul circolo bqf , e sulla curva qualunque ARG le due incidenti Pq , PR , che comprendano un angolo uguale al dato V , e sieno nella ragion data di m ad n .

ANALISI GEOMETRICA.

Suppongansi esser Pq , PR le linee rette addimandate.

Si unisca il centro c del dato cerchio col punto P , e poi facciasi l'angolo cPC uguale al dato V , CP

uguale a cP , e col centro C intervallo cq si descriva il cerchio BQF , che sarà dato di sito rispetto al punto P , ed alla curva ARG . Sicchè tirando dal punto P nel cerchio BQF l'incidente PQ uguale all'altra Pq , quella dovrà restarne adattata sulla PR . Imperocchè congiunta la CQ i due triangoli CPQ , cPq , per la 8. El. I. avranno uguali gli angoli CPQ , cPq ; onde aggiungendo ad essi di comune l'angolo QPc , dovrà risultarne l'angolo CPc uguale all'altro QPq . Ma il primo di questi due angoli è uguale al dato V , cui si è supposto uguale l'angolo RPq . Adunque sarà l'angolo QPq uguale all'angolo RPq ; la PR sarà coincidente colla PQ ; e la presente indagine si ridurrà a quella del 1°. Caso del Problema precedente.

Lo stesso intendasi per la Parte II. di un tal Problema.

457. *Scol.* Questo Problema, ch'è un de' più facili tra quanti il Sig. Fermola ne ha raccolti nell'Opuscolo concernente il presente argomento delle *Applicazioni*, poteva ricevere anche, com'ei lo accenna, pronto risolvimento da' luoghi Piani di Apollonio, che per le seguenti ragioni ha egli recusato di usare. Prima perchè la sua Analisi Geometrica ha un cammino assai breve. Di poi perchè l'era suo disegno di recar delle algebriche equazioni, efflu di dimostrare in pochi giri di Analisi cotesti Luoghi di Apollonio, ed altri più rilevanti. E finalmente col suo Principio di *trasferimento* egli suole scortar molto le dimostrazioni geometriche de' detti luoghi. Onde il rapportarli sarebbe stato un superfluo lavoro.

L E M M A I.

458. *Se da un punto P (Fig. 151) preso fuori la*

curva *RAN*, qualunque ella siasi, vi si conduca un' incidente *PN*, la quale si divida in *n* in una ragion data; cotesto punto *n* dovrà allogarsi nell'altra curva *ran* simile alla proposta *RAN*.

E se le due *PN*, *Pn* debbano esser reciproche a due linee rette date; il punto *n* della divisione dell'incidente *PN* si dovrà ritrovare in una curva dissimile alla proposta *RAN*.

DIMOSTRAZIONE.

PART. I. Dal punto *P* tirisi la *PC*, come ne piace, che però sia una comoda direttrice della proposta curva *RAN*. Onde chiamandò *v*, *z* le due qualunque coordinate ortogonali *PM*, *MN* di essa, l'equazione di tal curva, s'ella sia algebrica, potrà generalmente esprimersi per ..

$$a + bv + cx + dvz + ev^2 + fx^3 \dots + Uz^n = 0 \quad A$$

Ed abbassando dal corrispondente punto *n* la *nm* perpendicolare alla *PD*, si ponga *Pm* = *x*, ed *mn* = *y*, e poi si dinoti per *h* : 1 la costante ragione di *PN* : *Pn*, o la sua uguale di *PM* : *Pm*. E poichè sta *MN* : *mn* :: *PN* : *Pn* :: *PM* : *Pm*, sarà *h* : 1 :: *x* : *y*, ed *h* : 1 :: *v* : *x*. Vale a dire dovrà essere *z* = *hy*, ed *v* = *hx*. Sicchè sostituendo nell'Equazione *A*. cotesti valori delle *z*, *v*, e fattevi le debite riduzioni, con porvi benan-

che, $\frac{a}{h} = x$, ella si cangerà in quest'altra

$$a + bx + cy + dhxy + ehx^2 + fhy^2 \dots + Uh^{n-1}y^n = 0, \quad B$$

Che ben si comprende esser simile ad *A*, non che del medesimo di lei grado.

E se mai la data curva *RAN* sia trascendente, e la sua equazione per le coordinate ortogonali *PM*,

MN esprimasi per $f(v, z) = 0$; quella della curva *nar* dovrà dinotarsi per $f(hx, hy) = 0$. E tanto in quel caso, che in questo s'intenderà esser simili le due curve RAN, *ran*.

PART. II. Che se il rettangolo di PN in P_n debba esser dato, che dinoteremo per K^2 , colle proposte variabili ci potrem guidare nel seguente modo a rinvenir l'equazione della curva *nar*. Cioè a dir, essendo $P_n = \sqrt{(x^2 + y^2)}$, e quindi $PN = \frac{K^2}{\sqrt{(x^2 + y^2)}}$; sarà

la ragione di P_n a PN uguale a quella di $x^2 + y^2$ a K^2 . Ma pe' triangoli simili PMN, P_{mn} sta $PM : P_m :: PN : P_n$, ed $MN : m_n :: PN : P_n$. Quindi sarà $v : x :: K^2 : x^2 + y^2$, e $z : y :: K^2 : x^2 + y^2$; cioè a dire sarà $v = \frac{K^2 x}{x^2 + y^2}$, e $z = \frac{K^2 y}{x^2 + y^2}$. Laonde, sostituendo

nell'Equazione A questi valori delle v, z , ne verrà la seguente Equazione

$$a + \frac{bK^2 x}{x^2 + y^2} + \frac{cK^2 y}{x^2 + y^2} + \frac{dK^4 xy}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{UK^2 y^2}{(x^2 + y^2)^3} = 0, \quad C$$

la quale si riduce a quest'altra

$$a(x^2 + y^2)^3 + K^2(bx + cy)(x^2 + y^2)^2 + UK^2 xy^2 = 0, \quad D$$

Ove ben si comprende esser l'Equazione D di doppio grado dell'altra A, e potersi da quella inversamente rilevar quest'altra, con sostituire in D la grandezza v

in luogo di $\frac{K^2 x}{x^2 + y^2}$, e l'altra z invece di $\frac{K^2 y}{x^2 + y^2}$.

E, se la curva NAR sia trascendente, e la sua equazione si dinoti per $f(v, z) = 0$; quella della curva *nar* ne sarà anche trascendente, e verrà dissimile alla precedente con sostituirvi i recati valori delle v, z .

459. Cor. 1. La curva *nar*, che derivasi dalla

proposta linea NAR col prenderne in ciascuna incidente PN la parte Pn direttamente, o reciprocamente proporzionale all'anzidetta incidente, può dirsi la derivata della linea retta NAR per diretta, o per reciproca divisione. Ed una tal derivata sarà algebrica, se tal ne sia la proposta linea retta NAR , come rilevasi dalle addotte equazioni. Quindi è, che dinotando per m il grado della derivata, dovrà esser, come l'è noto dalla Geometria Sublime, $\frac{1}{2}(m'+3m)$ il numero de' punti, pe' quali dee passare tal derivata, per averne una determinata posizione. E ne sarà data la sua posizione e la natura, se diasi cotesto numero di punti, e la sua caratteristica equazione.

460 Cor. 11. Una tal derivata può concepirsi esistente nel sito natio nar , o nell'altro $n'a'r'$, che ella abbiassi acquistato col girare angolarmente dintorno al punto P , finchè la PC abbiavi descritto un dato angolo ϕ . E tanto in quel sito, che in quest'altro, la potrem concepire generata per assegnazione di punti.

461. Cor. 111. Se una tal derivata sia algebrica, o ch'ella esista nel sito natio nar , o nell'altro $n'a'r'$ di trasferimento, può talora con moto organico descriversi comodamente. E sarà bene su tal proposito osservare tutto quel, che saggiamente sulla descrizione organica delle curve (*) vien rapportato da'sommi Geometri il Cavalier Newton, Colin Mac-Laurin, e Braikenridge.

(*) Il Sommo Newton nel proporre l'organica descrizione delle curve algebriche si valse ingegnosamente del moto di due angoli dati intorno a' loro vertici. Cioè a dire: se due angoli girino intorno a' vertici loro, (rimanendone invariata la quantità di ciascheduno), e l'intersezione di un lato di un angolo con un lato dell'altro facciasi percorrere una retta data di posizione, che non passi per alcuno de' vertici de' detti angoli; l'intersezione degli altri due lati vi segnerà una sezione conica. Se quella si trasporti per una curva co-

462. *Cor. IV.* E se la derivata per divisione diretta, o ch'ella sia algebrica, o trascendente, vogliasi descrivere organicamente, basterà a tal oggetto l'adoperare il solo *Pantografo*.

463. *Cor. V.* La derivata di una curva algebrica per la divisione diretta delle incidenti è il più semplice caso del trasmutamento di una curva in un'altra dello stesso genere di essa. Sulla qual cosa è ben rileggere le ricerche fatte dal sommo Newton ne *Principj Matematici della Filosofia Naturale*.

464. *Scol.* La teorica de' Luoghi Piani di Apollonio resta compiutamente dimostrata, sol che si proponga l'Equazione A per la linea retta, e per lo cerchio, e vi si usino le addotte trasformazioni. Ed anzi dall'equazioni A, B, C, D può intendersi la teorica, che a Luoghi Solidi, ed Ipersolidi debbano per tali incidenti convenire.

PROBLEMA V.

465. *Date di sito due qualunque curve, ed un punto fuori di esse; condurre da questo su quelle due incidenti, che comprendan fra loro un angolo dato, e sieno direttamente, o reciprocamente proporzionali a due linee rette date.*

SOLUZIONE.

PART. I. Siene NAR, QBS (fig. 151) le due

linee, quest'altra dovrà segnare una linea di terzo ordine. E così più oltre, ove convien supplirvi alcune limitazioni. Intanto il Signor Mac-Laurin aggiunse le dimostrazioni a questi Teoremi, e poi rese più agevoli coteste ricerche. E l'Sig. Brakenridge le ampliò mirabilmente coll'introdurvi tre poli, intorno a quali si aggirano tre linee rette; e dalle linee, in che si muovono due di queste tre intersezioni, si ne rileva la linea retta descritta dalla rimanente.

curve date, fuori delle quali sia il dato punto P , dal quale debbansi ad esse condurre due incidenti, che comprendano un angolo dato ϕ , ed abbiano una ragion data. La curva nar sia la derivata dalla proposta NAR per divisione diretta, ed ella si concepisca trasferita nel sito avventizio $n'a'r'$, sicchè l'angolo CPC' sia uguale al dato ϕ : e'l punto n' sia uno degl'incontri della curva $n'a'r'$ colla data QBS , se il Problema sia possibile. Giungasi la linea retta Pn' , e si formi nel punto P della $n'P$ l'angolo $n'Pn$ uguale al dato ϕ : dico esser le due linee rette Pn' , e PN quelle che si richieggono.

Imperocchè la linea retta $n'P$ è uguale (*) all'incidente Pn nella derivata nar . Ma l'è poi PN a Pn nella ragion data: adunque in tal ragione dovrà stare la PN alla Pn' , le quali comprendendo benanche un angolo uguale al dato ϕ , saranno le richieste.

PAR. II. Lo stesso artificio s'impieghi a risolvere il proposto Problema, quando le richieste incidenti, oltre al comprendere un angolo dato, debban contenere un rettangolo dato. Ed una simigliante dimostrazione dovrà convincerne della verità della costruzione.

Cor. Un simile artificio potrà adoperarsi, se mai si proponga di condurre le incidenti PN , Pn' , che contengano un angolo dato, ed una di esse sia una certa funzione dell'altra.

FINE.

(*) Leggasi la prece. Prop., ed i Coroll. I. e II.



NOTE GEOMETRICHE

AL PRESENTE TRATTATO.

Queste note, come già dissi nell' Introduzione, hanno per oggetto, o alcune ricerche geometriche, non già di sito, affini ad altre cose trattate in quest' opera, o a mostrare qualche teoria geometrica che risulti dall' insieme di più problemi risolti, o finalmente a rischiarare taluna cosa che forse a' principianti potrebbe riuscire alquanto difficile a rilevarsi.

NOTA (A) ALLE PROP. XXII, XXIII, ED AL TEOR.
CH' È DOPO QUESTA NEL N. 71.

1. Euclide ne' primi sei libri de' suoi Elementi diede la maniera di descrivere un triangolo, dati i tre lati che lo dovevano comprendere, ed in altre proposizioni stabili poi i principj per costruirlo, prendendovi per determinanti di esso, o *due lati dintorno ad un angolo*; o *due angoli adjacenti ad un lato*; o *due lati e l'angolo opposto ad un di essi*; o finalmente *due angoli e 'l lato ad un di questi opposto*. Dopo ciò i Trigonometri esibirono le regole per determinare in ciascuno di questi casi, dalle tre parti del triangolo date nel valore, da essi così dette, il valore delle rimanenti: sicchè ogni triangolo rettilineo ne'sue-

cennati casi si può o geometricamente costruire, o pure trigonometricamente risolvere. Egli però non fece lo stesso dell'angolo solido compreso da tre angoli piani, essendosi limitato solamente a costituirlo *con tre angoli piani dati*, non tenendo conto, come fuori del suo scopo, degli altri casi in cui fossero dati. II°. *Uno di tali angoli piani, e gli angoli in cui gli altri due s'inclinavano rispettivamente al piano di quello*. III°. *Due angoli piani che lo comprendono, e l'inclinazione de' piani in cui essi si ritrovano*. IV°. *Due degli angoli che lo comprendono, e l'inclinazione del piano del terzo a quello di uno de' dati*. V°. *Un angolo, e le inclinazioni del piano di un altro al piano del dato, ed a quello del terzo angolo non dato*. VI. *Finalmente le tre inclinazioni de' piani in cui esistono i tre angoli che lo comprendono*. Val quanto dire, che il triangolo sferico al quale corrispondono i casi sopra enunciati, come facilmente ognuno rileva (*), è risolvibile in ciascuno di essi colle ovvie regole della Trigonometria Sferica, ma non erasi geometricamente stabilito come si dovesse costruire, che nel solo caso che fossero geometricamente dati i suoi tre lati.

2. Or i tre Teoremi di dati da noi esposti ne' num. 68, 69, 71 suppliscono alla geometrica costituzione dell'angolo solido, e quindi del triangolo sferico ne' casi sopra enunciati al n.° II°, III°. e IV.; e per gli altri due casi eccone le convenienti costruzioni.

(*) Vegg. la nostra Trig. Sferica.

CASO V.

3. Sieno dati l'angolo $a'A'L$ (fig. 14.), e quelli ne' quali inclinasi il piano $LA'a$ sì al piano dell'angolo dato, che a quello del terzo angolo $a'A'a$.

Fatto lo stesso apparecchio del caso 2. della Prop. **xxi.**, si conchiuderà come nel principio del caso 2. della **xxiii.**, che prendendo di data grandezza la $A'C'$, verrà ad essere anche data la $C'c$, e la cb ; che perciò il punto b si apparterrà ad una circonferenza di cerchio descritta col centro c , intervallo cb , alla quale se tirisi per A' la tangente $A'a$, si otterrà così l'angolo $LA'a$. E l'altro $a'A'a$ potrà ottenersi costruendo il triangolo CbA' in cui sono dati i tre lati.

CASO VI.

4. La risoluzione di quest'ultimo caso, cioè quando si voglia: *Determinare i tre angoli che comprendono un angolo solido, di ti quelli delle inclinazioni de' piani di essi, per indi costituirlo*, dipende dal seguente

L E M M A

5. Se per gli estremi di due raggi di una sfera posti ad angolo, si tirino i rispettivi piani tangenti ad essa, questi s' inclineranno in un angolo, ch' è il supplemento di quello compreso da que' raggi.

Imperciocchè è chiaro, che se per tali raggi si faccia passare un piano, questo dovrà esser perpendicolare a' due piani tangenti suddetti, e quindi le comuni sezioni di que-

sti con quello dovranno comprendere l'angolo d'inclinazione de' piani tangenti. Che perciò nel quadrilatero che vien costituito da queste comuni sezioni e da' raggi, essendovi due angoli retti, i rimanenti due dovranno essere l'uno supplemento dell'altro.

6. Cor. 1. Si rileva da ciò, che se i raggi erano tre, e disposti come lati di un angolo solido triedro, in tal caso i tre piani tangenti la superficie sferica negli estremi di questi tre raggi, dovranno comprendere un altro angolo solido, in cui le inclinazioni de' piani degli angoli che lo comprendono sono i supplementi rispettivi degli angoli piani dell'angolo solido che aveva per lati i tre raggi.

7. Cor. 2. E siccome ogni altro piano perpendicolare ad un de' raggi, in qualunque punto di esso, dee inclinarsi a' piani perpendicolari rispettivamente agli altri due raggi ovunque gli si tirino, in quegli stessi angoli in cui s'inclinavano i tre piani tangenti suddetti, perciò si potrà generalmente dire, che:

8. Cor. 3. *I tre piani perpendicolari rispettivamente a' tre lati di un angolo solido triedro, costituiranno nel loro incontro un altro angolo solido, in cui gli angoli d'inclinazione de' piani de' tre angoli che lo comprendono, sono rispettivamente i supplementi di quelli dell'angolo solido proposto; che perciò questo nuovo angolo solido si dirà supplementale.*

9. Scol. Ed al contrario si potrà facilmente rilevare che: *Se da un punto preso in un angolo solido triedro, si abbassino le perpendicolari su i piani de' tre angoli che lo comprendono, queste comprenderanno tre angoli, che sono i supplementi rispettivi di quelli in cui inclinansi il piani dell'angolo solido proposto.*

10. Cor. 1. Quindi si vede, che: dati i tre angoli d'inclinazione de' piani di un angolo solido triedro, sono dati per conseguenza anche quelli che comprendono il suo

supplementale; che perciò sono anche dati gli angoli d' inclinazione de' piani di questo (lo che ora mostreremo come facilmente si ottenga), e quindi quelli del suo supplementale , cioè del proposto. Laonde la costituzione di un tal angolo solido si ridurrà alla Prop. XXIII^o dell' XI^o libro di Euclide.

11. Cor. 2. E per mezzo dell'angolo solido supplementale si potrà anche risolvere il caso III^o dal II^o, e l' V^o dal IV^o, o al contrario.

12. Ma eccoci a risolvere il Problema di sopra enunciato per VI^o caso delle presenti ricerche.

P R O B L E M A.

Dati i tre angoli piani che comprendono un angolo solido; determinare quelli in cui s' inclinano scambievolmente i piani di essi.

La costruzione della *fig. 14.* mostra chiaramente qual via debba tenersi per ciò ottenere. Di fatti è chiaro, che se i piani $aA'a$, $a'A'L$ si abbattano col piano $LA'a$, le bC , $C'C$ si porranno in diretto colle cb , cC' . Laonde per avere gli angoli d' inclinazione di que' due piani al piano del terzo $LA'a$, cioè gli angoli Cbc , $CC'e$, dovrà praticarsi la seguente costruzione.

I tre angoli dati, che comprendono l'angolo solido, si sviluppino sopra un piano dintorno ad un punto, come gli presenta la *fig. 152.*; indi presi ne' loro lati estremi $A'a'$, $A'D$ le $A'C$, $A'C$ uguali, si tirino da questi punti alle $A'L$, $A'a$ le perpendicolari $CC'e$, Cbc , e si producano, finchè s' interseghino in e . I triangoli rettangoli costituiti rispettivamente colle ipotenuse Cb , CC' , e co' cateti bc , $C'e$ daranno per angoli opposti all'altro cateto, che sarà in essi lo stesso, gli angoli in cui inclinavansi rispetti-

amente i piani dell'angolo solido proposto a quello dell'angolo $C'A b$. E l'angolo d'inclinazione di que' piani tra loro si potrà facilmente determinare nel seguente modo, cioè: Giungasi la bC' , e da' punti b , C' si abbassino sulle $A'D$, $A'a$ le perpendicolari bh , $C'H$; se costituiscesi un triangolo con queste tre linee rette, l'angolo cercato sarà quello che in tal triangolo risulterebbe opposto alla bC' . La qual cosa è facilissima a rilevarsi.

SCOLIO GENERALE.

13. Nell'esposte ricerche non abbiamo posto mente, che all'uniformità e semplicità delle soluzioni, potendo facilmente ogui qualunque giovine alquanto versato nelle cose geometriche supplire da se all'eleganza delle costruzioni da noi indicate.

(B) AL LEMMA DELLA PROP. LVII.

L'analisi geometrica del problema risoluto in questo lemma ci ha condotti a vedere che: *la tangente comune a due cerchi divide la congiungente de' loro centri nella ragione de' raggi*, ma è anche vero più generalmente che: *Una retta la quale ascinde da due cerchi due porzioni simili, divide la congiungente de' centri in proporzione de' raggi*.

In fatti sieno ABC , abc (*fig. 153*) i due cerchi, da' quali la retta AD ascinda le porzioni simili ACB , acb ; congiunte le OA , OB , oa , ob , saranno uguali gli angoli AOB , aob , e quindi gli altri OAB , oab , onde sarà $OA:oa :: OD:od$.

(C) AL LEMMA DELLA PROP. LVIII.

Un tal lemma potrà più generalmente enunciarsi ne seguente modo , cioè

Se le congiungenti de' centri di tre cerchi dati, si dividano nella corrispondente ragione de' raggi di essi; i tre punti delle divisioni dovranno sempre alloggiarsi in una linea retta di sito.

(D) ALLA PROP. LXI.

1. Il Problema de' tre cerchi da farsi toccare da un quarto, che formava il principale problema de' due libri perduti del *luogo di risoluzione* composti da Apollonio Pergeo, e detti delle *Tazioni*, al rinascimento della Geometria fu dal Vieta proposto a disfida al Geometra de' Paesi Bassi Adriano Romano. Il Vieta e gli altri Geometri di que'tempi, non furono sicuramente paghi della soluzione, che per mezzo di due iperboli ne diede Adriano, ed il Vieta stesso si accinse dopò ciò ad una divinazione de' suddetti libri delle *Tazioni*, ove i dieci problemi di questo geometrico argomento furono da lui risolti. E sebbene le sue costruzioni non sieno sicuramente una divinazione di quelle del Geometra di Perga, poichè egli non procedè in tali soluzioni servendosi di que'lemmi stessi, su quali aveva Apollonio stabilite le sue, e che Pappo ci ha conservati nel VII° libro delle sue *Collezioni*, pure i Geometri restarono oltre modo contenti di questo suo lavoro, ed egli stesso ne fu sì pago, che onorossi perciò del pomposo titolo di Apollonio Gallo.

Il Newton ne' suoi principj Matematici, al Lemma XVI, seppe da' principj stessi di risoluzione di Adriano Romano ricavare un' elegante soluzione del Problema suddet-

to, convertendo maravigliosamente i due luoghi all' iperbole de' quali si era prevalso, per la composizione di tal problema, quel Geometra, in due luoghi alla linea retta. Egli però con ciò fare si dimostrò non interamente pago della soluzione del Vieta, e soggiunse solamente in fine della sua: *Solvitur etiam hoc lemma problematicum per librum tactionum Apollonii a Vieta restitutum*. E ciò non ostante, l'ingegnoso riduzione del Newton ne offre per tal problema un solo de' due punti soddisfacenti al quesito. Le opere su quest' argomento composte dal Camerer Tedesco, e dal Lawson Inglese (*) tanto lodate dal Montucla, nulla contengono di nuovo intorno al medesimo, come questi ci aveva annunciato nella sua *Storia delle Matematiche*. Intanto il nostro egregio Signor Fergola, tra le altre importanti ricerche da lui fatte sulle opere degli antichi Geometri, messi a considerare su i problemi delle Tazioni, s'avvide che la proprietà dell' iperbole della quale Adriano Romano si avvalse per la sua soluzione del problema de' tre cerchi, e dalla quale il Newton era maravigliosamente ripiegato in costruire il problema suddetto coll' intersezione di due rette, potev' dimostrarsi nel triangolo per le pure vie della Geometria Elementare, e dopo ciò egli ne recò a' problemi delle Tazioni semplicissime, uniformi, ed eleganti soluzioni, che furono poi a me di sprone, perchè risolvessi in una maniera analoga, e col principio stesso gli altri non meno difficili Problemi de' contatti sferici. E queste soluzioni del Fergola, ed un' indicazione di quelle da me distese su i contatti sferici furono pub-

(*) La prima di esse è intitolata: *Apollonii Pergaei de Tactionibus quae supersunt, cum Vietas Librorum Apollonii restitutione, adjectis observationibus, computationibus, ac problematis Apollonii historia*, Gothae 1795; e l'altra *The two Books of Apollonius Pergaeus concerning Tangencies* — London 1771.

blicate nel 1809, ed in seguito presentate alla Reale Accademia delle Scienze di Napoli, e da questa pubblicate nel 1°. Vol. de' suoi Atti.

Si tiri per G al medesimo circolo la tangente GK , che incontri la AC in K , sarà dato ancora il punto K . Imperocchè l'angolo HGK è uguale all'altro GEF : ma questo, à cagione delle parallele EG , AC , adequa FCH ; sarà dunque l'angolo HGK uguale all'altro FCH . E quindi essendo simili i due triangoli HGK , HFC , starà CH : HF :: HG : HK , ed il rettangolo CHK sarà uguale al dato FHG . L'onde sarà dato il punto K , e si ridurrà il problema a condurre dal punto K la tangente KG al circolo EDG .

5. *Scol.* L'analisi geometrica qui recata di un tal lemma, comprende quella del suddetto lemma *xxxi* di Pappo, e l'altra del problema di riduzione, ch'egli in più lemmi precedenti aveva risoluto.

E, come ognun vede, un tal lemma problematico è quello da cui si deriva l'altro da noi esposto al n. 407. del presente Trattato,

PROBLEMA DELLE TAZIONI

6. *Descrivere un cerchio che insiem ne tocchi tre altri dati di grandezza e di sito.*

ANALISI GEOMETRICA DI APOLLONIO

RESITUITA DAL SIG. SCORZA.

Sieno ABC , DEF , GHI (*fig. 155*) i tre cerchi dati dintorno a'centri rispettivi M , N , O ; e si supponga che il cerchio AEI gli tocchi rispettivamente ne' punti A , E , I . Giungansi le AE , EI , AI . E poichè la porzione di cerchio AKB è simile all'altra AYE (*lem. 1.*), e che a questa è anche simile la DLE , saranno perciò simili tra loro

le porzioni AKB, DLE; che perciò la AE dovrà incontrare la congiungente MN de' centri de' cerchi ABC, DEF nel punto P, ov'essa è divisa proporzionalmente a' raggi di quelli (*Nota B*). Similmente la AI dovrà incontrare la congiungente MO de' centri M, O de' cerchi ABC, GHI nel punto Q, ove quella è divisa in proporzione de' raggi di questi. E così pure la NR starà alla RO, come il raggio del cerchio DEF a quello del cerchio GHI. Laonde i tre punti P, Q, R saranno allogati in una retta di sito (*Not. C*). Or dal punto E si tirì la ES parallela alla PQ, e giungasi la SI, che incontri in T la PQ, sarà l'angolo STQ uguale al suo alterno ESI: ma questo pareggia l'altro EAI con cui giace nella stessa porzione EYI. Adunque sarà l'angolo STQ uguale all'altro EAI, ed il triangolo APQ sarà simile al triangolo ITQ. Laonde starà PQ: QA :: QI: QT, ed il rettangolo PQT sarà uguale all'altro AQI. Ma questo rettangolo è dato; quindi sarà dato anche quello: perciò sarà data la QT, e per conseguenza il punto T.

Inoltre giungasi la GH. Ed essendo la porzione circolare IGH simile all'altra IAE, sarà l'angolo IGH uguale all'altro IAE, e perciò GH parallela ad AE. Laonde se la GH incontri la retta PQR in V, sarà il triangolo GVQ simile all'altro APQ, e quindi ad ITQ: ed il rettangolo VQT sarà uguale all'altro GQI, ch'è dato; che perciò sarà dato anche quello, e per conseguenza il punto V. Ed il proposto problema si sarà ridotto ad inflettere al dato cerchio GHI, da' punti dati Q, R la linea retta QIR, e fare che GH stia per dritto con VH, cioè al lemma che Pappo ne reca a tal uopo, e ch'è il 11° da noi quassù recato.

S C O L I O.

7. Quest'ingegnosa soluzione del problema de' tre cerchi ordita dal Professore Scorza, par fuori di ogni dubbio, che debba convenire con quella che di tal problema ne diede Apollonio ne' suoi libri *delle Tazioni*. Le ragioni che ci confermano in questa opinione sono; il trovare che l'Analisi Geometrica del Sig. Scorza riduce il problema a quello stesso lemma problematico, che Pappo Alessandrino aveva rilevato da' libri delle Tazioni di Apollonio, e che dovè formare precisamente la riduzione Apolloniana del detto problema. Inoltre tutti gli altri principj de' quali il Sig. Scorza si prevale in tale Analisi Geometrica s'incontrano evidentemente nelle Collezioni Matematiche di Pappo. E sebbene in queste non si ravvisi manifestamente che: *dividendosi le congiungenti de' centri de' tre cerchi dati nelle ragioni de' loro rispettivi raggi; i tre punti delle divisioni sieno allogati in una retta*, il qual principio è il maggior cardine della presente analisi geometrica, ciò lungi dal farci sospettare che ad Apollonio non fosse noto, e che di esso non si prevalse nella sua soluzione, dovrà piuttosto farci giudicare che Pappo nol recò nelle sue Collezioni, per la ragione che Apollonio non già lo aveva assunto nella soluzione, come aveva fatto degli altri lemmi che Pappo ha perciò egli rilevati; ma sì bene lo aveva a disteso incidentemente in essa sviluppato. E poi chiunque è versato nel risolvimento de' problemi geometrici, dal vedere che la soluzione del Sig. Scorza procede su' principj geometrici degli antichi, che Pappo ci ha conservati, e termina collò stesso lemma di riduzione, del quale, non v'ha alcun dubbio che dovè prevalersi Apollonio per la sua, avrà certamente come indubitato, che dovè questo insigne geometra passare per quello stesso anello di connessione poc' anzi enunciato.

8. Ma ciò che si è detto non è ancor tutto quello che si può addurre per istabilire che Apollonio dovè conoscere, e quindi usare il suddetto principio; ed il Sig. Scorza trae anche argomento in conferma di ciò dal rinvenire nell'VIII^o. libro delle Collezioni di Pappo dimostrata la conversa di tal proposizione cogli stessi passaggi, che vi bisognano per dimostrare il principio sopra enunciato (7). In fatti volendo dimostrarsi che: *I punti P, Q, R ne quali le congiungenti i centri de' tre cerchi ABC, DEF, GHI restan divise in proporzione de' loro raggi, esistano in una linea retta*, egli vi si conduce nel seguente modo semplicissimo, che giudica essere la stessa via che tenne Apollonio.

Si tiri pel centro N del cerchio EFD la NX parallela alla PQ. E poichè sta $MA : ND :: MP : PN$, ed $ND : OI :: NR : RO$, si avrà $MA : OI :: (MP : PN) \times (NR : RO)$. Ma $MP : PN :: MQ : QX$. Adunque sarà $MA : OI$, o pure $MQ : QO :: (MQ : QX) (NR : RO)$; il perchè sarà RQ parallela ad NX, e perciò in diretto con QP.

9. Vale a dire, che potrà conchiudersi da ciò, che se: *Da un punto N (fig. 156), preso in un lato MP del triangolo MPQ, s'inclini all'altro lato MQ la NOR in modo, che stia MQ : QO :: (MP : PN) (NR : RO)*; il punto R dovrà trovarsi nella PQ prolungata. La cui conversa sarebbe che: *Se nella PQ prolungata si prenda un punto R, dal quale s'inclini al triangolo PMQ la RON, dovrà stare MQ : QO :: (MP : PN) (NR : RO)*. E questa conversa trovasi da Pappo dimostrata nella Prop. III. del Lib. VIII., e prima di Pappo l'aveva anche rilevata Tolomeo nel suo *Ahnagesto* (Veg. b 11^o. Cap. del 1^o. lib. in prin.).

Bisogna dunque concludere, per tutte le addotte ragioni, che il lemma sopra enunziato (7) era conosciuto da-

gli antichi, e che Apollonio dovè di esso prevalersi nella soluzione del problema de' tre cerchi.

10. Intanto il Vieta, che nella soluzione del penultimo Problema delle Tazioni aveva mostrato di conoscere il principio che: *la linea retta la quale congiugne i contatti di due cerchi dati con un terzo, dee passare per un punto dato*, non seppe poi farne uso nel Problema de' tre cerchi, e quindi ridurne l'analisi geometrica di esso, come doveva, al lemma di Pappo. Ed a me pare fuor di dubbio, che ciò sia avvenuto perchè egli mancò di rilevare l'anello di connessione tra il poc' anzi detto principio ed il lemma di riduzione, cioè quello indicato nel n°. 7, del quale si è egregiamente prevalso il Sig. Scorza; e ch'è la pietra angolare della sua soluzione, e dell'Apolloniana. Del resto, da tutto ciò dovrà conchiudersene, che il Vieta non procedè giustamente nel restituire le soluzioni Apolloniane de' Problemi delle Tazioni, e che dal confronto dell'analisi geometrica Apolloniana del problema de' tre cerchi restituitaci dal Professore Scorza, con quella del Sig. Fergola si rileva evidentemente, quanto il lavoro di questo nostro geometra superi in eleganza ed in semplicità quello del Geometra greco.

(E)

ALLA PROP. LXII.

Ottenuta dal Professore Scorza la costruzione del Problema de' tre cerchi secondo i principj di Apollonio, lo spin-
si a voler cercare, se co' principj stessi fosse possibile di ordire quella dell'altro problema analogo sulle sfere, cioè di *far toccare quattro di queste da una quinta*, affinchè un tal geometrico lavoro su i contatti circolari e sferici, siccome aveva proceduto su i principj stessi nelle mani del Sig. Fergola e mie, così anche restasse completamente trattato da lui col metodo Apolloniano. Or egli a ciò appli-

catosi ne diede subito fuori la desiderata soluzione, che da me presentata alla nostra Reale Accademia delle Scienze, e da essa approvata, fu inserita nel 1^o. Volume degli Atti della medesima, donde ora l'estrargo per qui recarla.

LEMMA I.

Se le due sfere ABC , DFE (fig. 157.), date di sito e di grandezza, sieno toccate da una qualunque sfera ADH ; la linea retta AD , che unisce i loro contatti A , D , dovrà convenire con la linea retta CE , che unisce i centri C , E , in un dato punto K .

Poichè la sfera ADH tocca le due sfere ABC , DFE ; dovranno le congiungenti HC , HE de' centri di quella sfera e di queste passare pe' rispettivi contatti A , D . Adunque la congiungente AD di tali punti giacerà nel piano AHD , il quale sega le tre dette sfere ne' loro cerchi generatori ABC , DFE , ADH . Ma questo cerchio ADH tocca gli altri due ABC , DFE ne' punti A , D . Adunque la linea retta AD dee convenire con l'altra CE , congiungente de' detti centri, in un punto dato K . — *C.B.D.*

LEMMA II.

Se da' dati punti M , L (fig. 158.) inflettansi ad una data sfera le linee rette MF , FL ; e la linea retta GV de' loro incontri con la superficie della sfera passi pel dato punto T posto per diritto co' detti punti M , L : la linea retta GP , che tocca la detta sfera nel piano delle divise linee rette, dovrà passare pel dato punto P nella medesima ML .

Il piano delle tre linee rette MV , LG , GT segnando

la data sfera produca in essa il cerchio GVF , nel quale si tiri dal punto G la GN parallela alla ML , e giungasi la NF , che incontri la ML nel punto Q . E poichè l'angolo GNF è uguale all'angolo FQL , e l'angolo BVF esterno del quadrilatero $GVFN$ è pure uguale a GNF ; sarà perciò l'angolo FVT uguale all'angolo FQL : laonde pe' quattro punti Q, F, V, T potrà passare una circonferenza di cerchio; e sarà il rettangolo VMF uguale all'altro TMQ ; e questo sarà dato al pari di quello; e quindi sarà dato di sito il punto Q , per essere data la TM . Inoltre la retta GP toccando la data sfera nel piano del cerchio GVF , toccherà anche questo cerchio nel punto G ; e sarà l'angolo PGF uguale all'angolo GNF , o al suo alterno FQL ; ond' è che pe' quattro punti P, G, F, Q potrebbe passarvi anche un cerchio; e sarà il rettangolo PLQ uguale all'altro rettangolo GLF . Ma a cagione de' punti dati Q, L , è data la QL ; perciò sarà anche data la PL , e quindi sarà dato il punto P . — *C.B.D.*

P R O B L E M A .

Date di sito e di grandezza quattro sfere; descriverne un'altra che le tocchi.

A N A L I S I G E O M E T R I C A .

Sieno ABC, DE, GF ed HI (*fig. 159.*) le quattro sfere date; e suppongasi essere $ADFH$ quella che le tocchi tutte insieme rispettivamente ne' punti A, D, F, H . Giungansi le AD, AF, DF : dovranno queste tali congiungenti passare pe' dati punti K, L, M (*lem. I.*). E se il piano di queste tre linee rette s'intenda intersegare le sfere ABC, DE, GF ed ADF , e produrre in esse gli altrettanti cerchi ABC, DE, GF ed ADF , l'ultimo de'

quali dee toccare i primi tre; si rileverà chiaramente, che i tre punti dati K , L , M debbano stare per diritto. Or se intendasi tirata per D la DS parallela alla KM , ed unita la SF ; dovrà questa passare pel dato punto O nella KL (*). Ma perchè l'angolo DSF , o il suo uguale FOL è uguale all'angolo FGV , essendo simili le porzioni di cerchio FGV , FAD (**); perciò, se conducasi la linea retta GVT , saranno simili i triangoli FOL , GTL ; e quindi il rettangolo di GL in LF sarà uguale all'altro di OL in LT : onde sarà dato il punto T ; e tirata al cerchio GVF la tangente GP ; dovrà questa passare pel punto dato P nella KL (*lem. II.*). Quindi essendo la PG una linea retta tangente la data sfera GVF , dovrà il punto G del contatto appartenere, com'è chiaro, alla circonferenza di un dato cerchio nella sfera suddetta. Similmente, congiunte le linee rette AH , FH , dovranno queste passare pe' punti dati N , Q , che staranno per diritto col dato punto L : e ragionando nel modo stesso di poc'anzi, si dimostrerà, che la tangente GR del cerchio GF debba passare pel dato punto R nella linea retta NL ; e con ciò il punto G si apparterrà benachè alla circonferenza di un dato cerchio nella stessa sfera GVF . Sicchè resterà determinato il punto G dall'intersezione di questo cerchio dato coll'altro precedentemente determinato. Cioè a dire sarà data di sito e di grandezza la comune intersezione degli anzidetti due cerchi. Onde saran dati di sito gli estremi di tal retta. Ed il Problema proposto potrà dopo ciò facilmente con geometrico artificio comporsi. E sarà impossibile un tal Problema, se que' due cerchi non s'interseghino entro la data sfera.

(*) Vedi la soluzione del Probl. de' tre cerchi nella Nota E.

(**) Nota D n. 3.

(E) ALLA PROP. LXXXIX. ED AL SUO SCOL. II.

Il Problema di cui trattasi in questa Proposizione, merita senza dubbio l'attenzione de' Geometri, pe' diversi risultamenti a' quali ha dato luogo analiticamente trattato; ed è secondo di utili conseguenze per ciò che riguarda la maniera de' moderni analisti in caratterizzar la natura di un problema geometrico dall'equazione finale al medesimo.

La soluzione che di esso pretese darne, sono ormai 70 anni, un Matematico Francese, e che trovasi inserita nel Vol. II. delle *Memorie di Matematica* dell' Accademia delle Scienze di Parigi, faceva ascendere l'equazione finale al medesimo al secondo grado: ma tal soluzione, come ha fatto osservare a proposito il Sig. Lhuillier, in una sua Memoria, della quale tra poco dovremo parlare, riguarda un caso del medesimo, e non è la soluzione generale, che perciò debbe considerarsi come un peccato geometrico di quel geometra Francese. Il Lagrange, che nella sua Memoria *sulla piramide triangolare* inserita negli Atti di Berlino per l'anno 1773 intraprese a risolverlo, stabilisce appena gli elementi analitici per tal soluzione, co' quali non parmi sì facile il poterla condurre al suo termine, a fin di discernere il grado dell'equazione finale, che sicuramente riscirebbe molto complessa di termini, e suscettiva di molte e difficili riduzioni. Posteriormente al Lagrange, il Sig. Monge, dopo averne formato l'oggetto di una costruzione grafica nella sua *Geometria Descrittiva*, per mezzo di talune generali considerazioni sulle locali da lui impiegate per siffatta costruzione, pretende, che tal Problema debba essere del 64° grado. Occupatomi io dello stesso assunto, fin da che pubblicai i miei *Elementi di Geometria Descrittiva* nel 1807, stabilii le basi del calcolo per tal soluzione, donde si rileva-

va evidentemente, che l'equazion finale dovesse ascendere all'8° grado; e la stessa soluzione ritenni, allorchè nel 1815 pubblicai la prima volta la presente *Geometria di Sito*, ed anche in una mia Memoria concernente *alcuni Problemi principali sulla Piramide Triangolare*, che mi trovava aver già presentata alla Reale Accademia delle Scienze di Napoli, e che è tra quelle che formano il 1° volume già pubblicato degli Atti di questa

Tali basi erano le seguenti.

Si dinotino le AB, AC, AD (*fig. 83.*) per x, y, z , e le BC, CD, DB con a, b, c ; sarà il triangolo

$$BAC = \frac{1}{4} \sqrt{[4a^2x^2 - (a^2 - y^2 + x^2)^2]}$$

$$ACD = \frac{1}{4} \sqrt{[4b^2y^2 - (b^2 - z^2 + y^2)^2]}$$

$$ADB = \frac{1}{4} \sqrt{[4c^2x^2 - (c^2 - z^2 + x^2)^2]}$$

Il perchè, dovendo stare, per esser dato in ciascuno di questi triangoli l'angolo in A, il rettangolo de' lati dintorno ad un tal angolo all'aja corrispondente in data ragione; sarà quindi, pel triangolo BAC

$$xy : \frac{1}{4} \sqrt{[4a^2x^2 - (a^2 - y^2 + x^2)^2]}$$

in data ragione; e quindi anche in ragion data starà

$$4x^2y^2 : 4a^2x^2 - (a^2 - y^2 + x^2)^2$$

E se formisi il quadrato di $a^2 - y^2 + x^2$, il qual si sottragga da $4a^2x^2$, e poi si converta la ragione che a tal quantità ne serba $4x^2y^2$, sarà

$$4x^2y^2 : a^4 - 2a^2y^2 + y^4 - 2a^2x^2 + 2x^2y^2 + x^4 :: m^2 : n^2$$

(indicando per $m^2 : n^2$ la ragione che si ottiene convertendo la ragion data della precedente analogia). Quindi sarà pure

$$2xy : a^2 - y^2 - x^2 :: m : n$$

ed

$$a^2 - y^2 + x^2 = \frac{2nxy}{m}$$

Similmente operando per gli altri due triangoli, si troverà

$$b^2 - z^2 - y^2 = \frac{2pzy}{m}$$

$$c^2 - z^2 - x^2 = \frac{2qzx}{m}$$

Laonde l'equazione al problema sarà l'eliminata di queste ultime tre, e quindi dell'8° grado.

Siccome questa soluzione analitica del proposto problema non entrava che per incidenza nel piano della mia Opera, così trascurai di ulteriormente ~~spingere~~ il calcolo fino ad ottenere quell'eliminata: che per la natura de' metodi di eliminazione assai imperfetta sarebbe risultata; e mi quetai pure sul grado di tal problema, dalla seguente considerazione che io feci delle diverse soluzioni delle quali era suscettivo.

Rivolgendosi i segmenti BGC, CED, DFB (ecco il mio ragionamento) intorno alle loro rispettive corde, si debbono anche rivolgere i loro supplementi al cerchio, cioè gli altri segmenti BgC, CeD, DfB intorno alle stesse corde; vi saranno perciò sei superficie curve descritte dagli uni e dagli altri segmenti da ciascuna parte del piano BCD.

Ciò posto s'indichino i segmenti BGC, CED, DFB con P, Q, R, ed i loro rispettivi supplementi con p, q, r; saranno le combinazioni di essi segmenti, tre a tre, in numero di venti, ed espresse da PQR, QRp, PRq, PQR, pqr, qrP, prQ, phR, PQp, PQq, QRq, ec., delle quali essendo impossibili le ultime dodici, non potendosi giammai intersegare le superficie descritte da un arco circolare e dal suo supplemento al cerchio, se essi rivolgonsi dintorno alla comune corda; restano perciò possibili le sole prime otto, ch' esprimono otto diversi modi ne quali possonsi combinare le sei superficie curve suddette, per risolvere generalmente il problema proposto.

Intanto il Sig. Lhuillier celebre Matematico di Ginevra, imbattutosi in questo Problema della mia Geometria

di Sito, gli riesci di congegnarne l'elegante soluzione, che questa volta io ho recata nel Testo della presente Opera, e con la quale il grado di tal Problema ne resta definitivamente ridotto al 4^o , doude risulta, ch'esso sia di natura solido, e geometricamente costruibile; ed egli ebbe la compiacenza di ciò dinotarmi in una sua lettera nella quale dice: » J'envoye à l'Academie Royale un Mémoire dont » la rédaction finale a été occasionné par vostre Probleme » 89 pag. 166, et dans le quel je le ramene au 4^e degré. » Io però, dopo di aver questa volta sostituita nel testo della presente Opera alla mia soluzione quella del Lhuillier, che per la sua eleganza merita certamente la preferenza, non credo fuor di proposito di qui avvertire, che ciò non ostante il Problema sia effettivamente di ottavo grado, ma di natura complesso, cioè tale che la sua soluzione si può scindere in due identiche, ciascuna delle quali dà per ogni volta quattro delle soluzioni corrispondenti al medesimo; appunto come avviene del Problema di: *Applicare per un angolo di un quadrato una retta, che arrestandosi tra i due lati del medesimo, che comprendono l'angolo opposto, risulti di data grandezza*; ed anche in altri analoghi. Di fatti, esaminando gli otto casi da noi poc'anzi descritti, si vede, che quattro di essi risultino da un angolo solido triedro compreso da tre angoli dati, o da un di questi e da due supplementi dell'altro, mentre gli altri quattro rimanenti risultano da un angolo solido compreso da tre supplementi degli angoli dati, o dall'un di questi con due de' dati angoli. E ciò che qui ho astrattamente indicato, lo mostra anche la stessa soluzione del Lhuillier. Di fatti egli perviene alle due equazioni

$$x^2 - 2ax \cos. \alpha = \frac{m}{n} y^2 - \frac{2m}{n} ay \cos. \beta + \frac{m-n}{m} a^2$$

$$x^2 - 2ax \times \frac{pa \cos. \alpha - my \cos. \beta}{p-m} = \frac{my^2 - pa^2}{p-m}$$

che corrispondono a due curve coniche, dalla combinazione delle quali ne risulterebbero quattro valori per le x , y corrispondenti a' 4 casi del Problema. Ma chi non vede, che tal combinazione debba due volte eseguirsi, una volta cioè prendendo $\cos. \alpha$, $\cos. \beta$ e $\cos. \gamma$ col segno $+$ o $-$ quali risultano dagli angoli dati; ed un'altra volta co' segni contrarj $-$ o $+$ come appartenenti agli angoli supplementali de' dati; ossia, chi non vede che ciascuna di quelle equazioni rappresenti ad un tratto due curve della stessa natura e specie, secondo que' diversi segni poe' anzi indicati. Adunque, per tutto il già detto, la nostra soluzione, sebbene di minor eleganza che quella del Sig. Lhuilier, non è però tale da indurre in manifesto errore sulla natura del presente Problema, come le altre che precedentemente ad essa ne erano state date.

(F)

ALLA PROP. CXII.

» E si rileverà facilmente, che se l'angolo MHG sia » maggiore dell' altro LDF, in un tal caso risulterà ne- » gativo il valore del coefficiente della x , e quindi tal » curva sarà un' ellisse, ec.

Per agevolare a' giovani l'intelligenza di questo passaggio; con un qualunque raggio oE (*fig. 157*) si descriva l'arco circolare ETZ , al cui centro o si costituiscano gli angoli EoT , EoZ uguali rispettivamente ad MHG , FDL nella *fig. 104*, e da' punti T , Z si abbassino sul raggio oE le perpendicolari TV , ZS . Sarà il triangolo TVo simile a GMH (*figg. 104, e 157*), e quindi $To : oV :: MH : HG :: p : a$; che perciò se la To , o Eo s' indichi per p , la oV resterà dinotata da a .

Inoltre sarà il triangolo ZSo simile ad LDF, e quindi $oS : SZ : FD : FL :: q : a$.

Or essendo l'angolo MHG maggiore dell'altro LDF, sarà anche $ToE > ZoE$, l'arco $TE > ZE$, e $TV > ZS$. Ma $oS' + SZ' = oV' + VT'$; che perciò essendo $SZ' < VT'$, sarà $oS' > oV'$, ed $oS > oV$. Adunque la TV dovrà intersegare la Zo in un punto N, ed esser quindi $oN < oZ$. È poi $oS : SZ :: oV : VN$,

cioè $q : a :: a : VN = \frac{a^2}{q}$; donde $oN^2 = a^2 + \frac{a^4}{q^2}$.

Ma $oN^2 < oZ^2$, sarà dunque $a^2 + \frac{a^4}{q^2} < p^2$; e perciò

$a^2 + \frac{a^4}{q^2} - p^2$, o $\frac{a^2 q^2 + a^4 - p^2 q^2}{q^2}$ sarà una quantità negativa.

E similmente si dimostrerà che, se al contrario l'angolo MHG sia minore di LDF, tal quantità risulterà positiva.

Che se questi angoli diverranno uguali, lo saranno anche gli altri EoT , EoZ , quindi il punto Z, e l'altro N si riuniranno in T, e sarà $\frac{a^4 - p^2 q^2 + a^2 q^2}{p^2 q^2}$

$= 0$; che perciò l'equazione alla curva rappresenterà una parabola.

Finalmente in quest'ultimo caso, riunendosi i punti C, H svanirà la CH, cioè c , e l'equazione alla parabola si trasmuterà in $y^2 = a^2$, o $y = a$, ch'è ad una linea retta parallela alla generatrice.

ALLO SCOLIO DELLA PROP. CXII.

Dopo di aver fatto rilevare in questa proposizione, e nello Scol. di essa, che la superficie curva definita nel n.º 331, sia quella del cilindroide del Wallis, mi credo nell'obbligo

di qui indicare una proprietà importante di questo solido , cioè che : *Se l'asse trasverso dell'iperbole generatrice del cilindroide si prenda per asse maggiore di un'ellisse, la quale abbia per semiasse minore la quarta proporzionale in ordine al semiasse primario , al secondario , ed all'eccentricità di quell'iperbole ; la superficie dello sferoide schiacciato che si genera da siffatta ellisse, e quella del cilindroide corrispondente, saranno continuamente uguali.*

La storia di questa bella verità geometrica , le dimostrazioni varie che se ne sono fatte colla geometria degli antichi e coll'analisi moderna elementare, nella Scuola del Sig. Fergola, da'suoi distintissimi allievi Sig. Stefano Forte, Felice Giannattasio, Giuseppe Scorza , ed anche da me e dall'abilissimo Professore Sig. D. Giuseppe Sangro ; e le utili ed importanti ricerche alle quali ha dato luogo, nelle loro mani , l'argomento su cui occupavansi , si potranno riscontrare nella Raccolta di Opuscoli Matematici della Scuola del Sig. Fergola , e nel volume 1° degli Atti della Reale Accademia delle Scienze di Napoli.

(H) AL n°. 407.

Il Lemma di Pappo qui recato in forma di Teorema, come si è già detto al n°. 5 della nota D , è derivato dal Lemma XXII. , ch'egli desunse da' libri delle Tazioni di Apollonio , e del quale noi abbiamo rapportata l'analisi geometrica nella nota suddetta.

(I) AL n°. 409.

Un tal lemma è il XXX. rilevato da Pappo da' libri de' Porismi di Euclide , sebbene da noi si trovi diversamente enunciato.

(K)

Al n°. 421.

Rechiamo qui del Problema risoluto nella presente Proposizione un'ingegnosa riduzione comunicataci dall'egregio Professore Lhuilier già altre volte da noi nominato con lode dovuta al suo merito distinto. Essa è la seguente » Il
 » Problema 5. pag. 260 (egli dice) riducesi a : *sega-*
 » *re un arco di cerchio dato in due parti, tal che il*
 » *rettangolo delle tangenti (trigonometriche) sia dato di*
 » *grandezza; o che i rapporti di tal rettangolo al qua-*
 » *drato del seno tutto sia dato.*

Del qual Problema eccone la soluzione, ch'egli ne dà.
 » Sopra di una retta AB (fig. 162.) sia descritto un seg-
 » mento di cerchio capace dell'angolo dato (*). Andì si sup-
 » ponga adattata la MP perpendicolare alla AB, in modo che
 » AMP, BMP sieno le parti cercate dell'angolo dato AMB.
 » Per la supposizione il rapporto di $AP \times PB : MP^2$ è dato. Or
 » la MP incontri il secondo arco ANB di cui DB è la cor-
 » da ; sarà $AP \times PB = MP \times PN$; quindi è dato il rappor-
 » to di PN : PM. Ma è pure data la differenza di tali ret-
 » te, cioè il doppio della distanza di AB dal centro . A-
 » dunque quelle rette saranno entrambe date. E perciò ec:

(L)

AL n°. 441.

Ecco in qual modo si rileva ciò che si è asserito in questo Corollario , cioè che il punto D (fig. 144) si appartenga ad una data iperbole.

Da un tal punto D si conduca la DO parallela alla BC , e giungasi la BD . Ed essendo il triangolo ABC

(*) Cioè di quello sotteso dall' arco dato.

all'altro ABD, come AC ad AD e' il triangolo ABD al triangolo DOB, come AB a BO, o come AC a DC, sarà, per egualità ordinata, il triangolo ABC al triangolo DOB come AC ad AD in DC. Ma si suppone data la seconda di queste due ragioni: ed è anche dato l'antecedente della prima. Adunque sarà dato il triangolo DOB, e quindi il rettangolo di DO in OB, per esservi dato l'angolo DOB. Laonde il punto D appartiene ad un'iperbole che ha per assintoti le BA, BC, e per potenza un quadrato quanto il dato rettangolo di DO in OB.

Finalmente per dilucidare la conclusione di un tal corollario, soggiungeremo, che: essendo data la ragione di AC ad AD, sarà anche data la sua uguale di CB a DO: ma è data la DO; adunque sarà data la CB, dal cui estremo C dovrà condursi al punto D la CD, che sarà la retta addimandata.

(M)

AL n°. 45o.

Allorchè la retta che unisce i concorsi delle due inflesse co' lati dell' angolo dato dee esser parallela alla direttrice, ch' è la prima parte del presente Problema, vi si potrà recare la seguente semplicissima soluzione indipendente dal lemma esposto nel n. 448, cioè

Giungasi l'ignoto punto Q (fig. 158) col vertice L del dato angolo MNL, e tal retta si distenda insino alla direttrice. Saranno le due ragioni di MG ad NG, e di AG a BG uguali fra loro, perchè uguali alla medesima ragione di PH ad EH: onde per l'uguaglianza di quelle due ragioni sarà il rettangolo MGB uguale all'altro AGN. E perciò, se descrivansi sulle MB ed AN, e dalla medesima parte i due semicerchi MKB, AKN, e poi dal punto ov'essi s'intersecano si abbassi sulla MN la perpendicolare KG, congiunta la GL, questa segnerà nella curva SQT il punto che si cerca.

(N)

AL n°. 459.

« Quindi è che dinotando per m il grado della derivata, dovrà esser . . . $\frac{1}{2} (m^2 + 3m)$ il numero de' punti pe' quali dee passare tal derivata, per avere una determinata posizione.

Veggasi su di ciò il Cap. IV. della *Theoria Linearum Curvarum* di Eulero. E qui soggiungeremo solamente, che l'espressione $\frac{1}{2} (m^2 + 3m)$ debba essere sempre un numero intero, il che intuitivamente si vede se m è pari: e supponendo m impari ed espresso da $2k+1$, quel binomio si cambierà in $\frac{1}{2} (2k+1) (2k+4) = (k+1) (k+2)$, la quale espressione è evidentemente un intero.

FINE

[DELLE NOTE.]

666287





Fig. 2

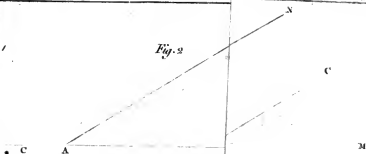


Fig. 3

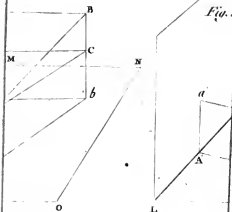


Fig. 6

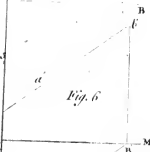


Fig. 7



Fig. 9

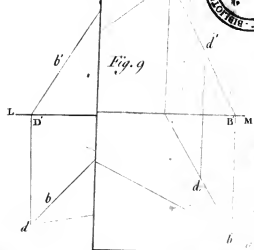




Fig. 11

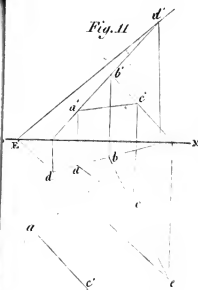


Fig. 15.



Fig. 13.

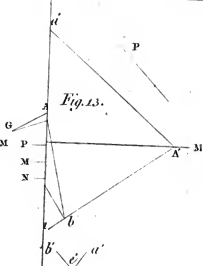


Fig. 17.

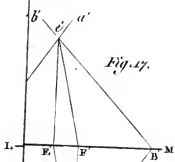


Fig. 20.

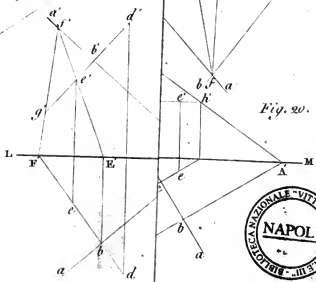


Fig. 22.

Fig. 24.

Fig. 27.

Fig. 28.



Fig. 31

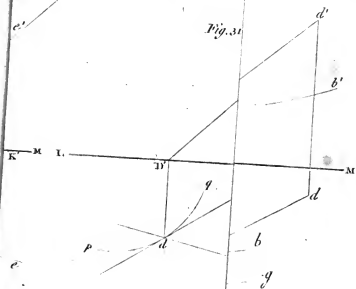
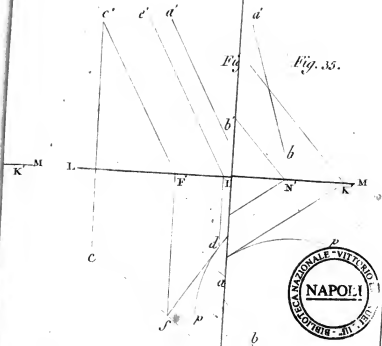


Fig.

Fig. 35.



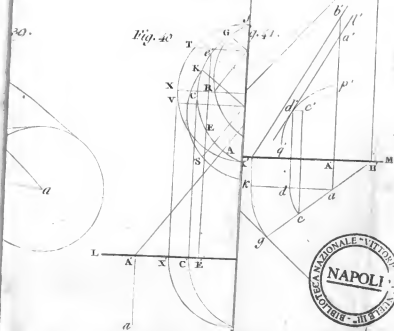
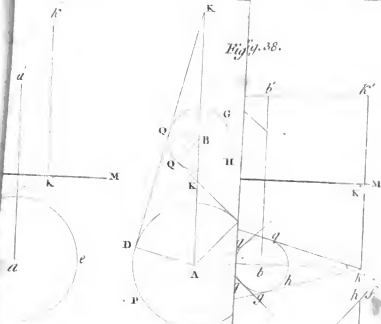




Fig. 43.

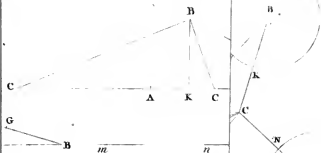


Fig. 45.

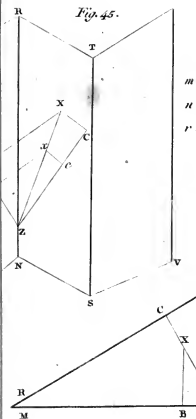
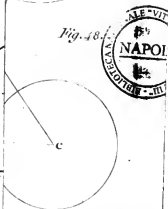
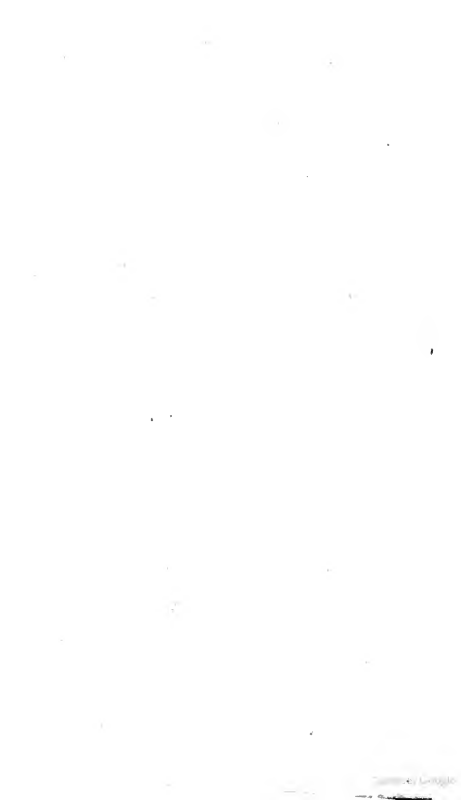


Fig. 48.





q. 49.

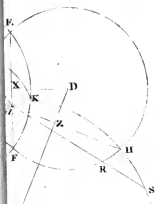
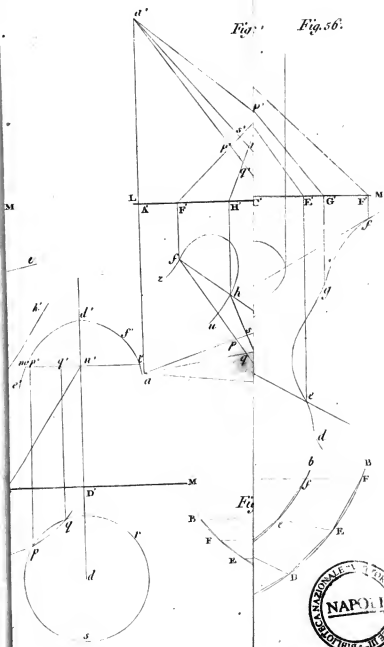


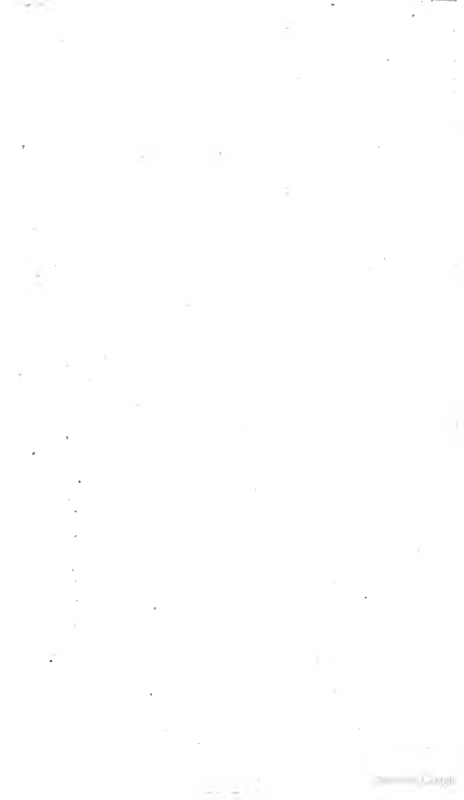
Fig. 51.

Fig. 52.









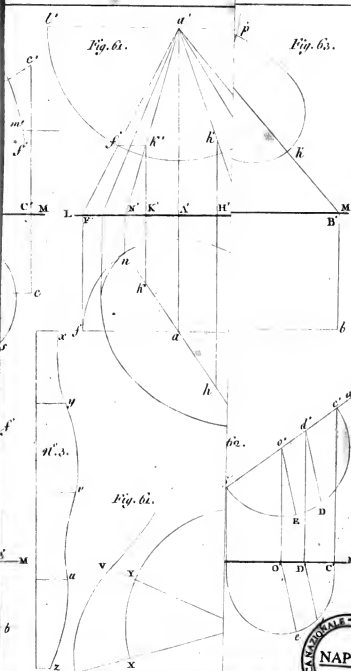


Fig. 67.

P

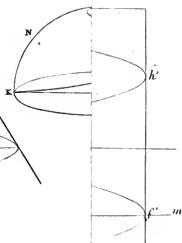
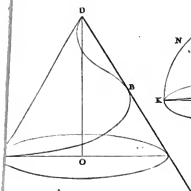


Fig. 69.

L. F' M

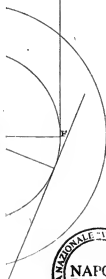
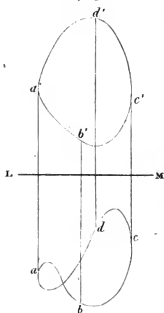
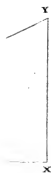




Fig. 73

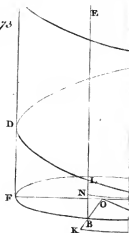


Fig. 74

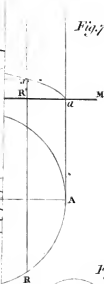


Fig. 75

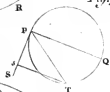
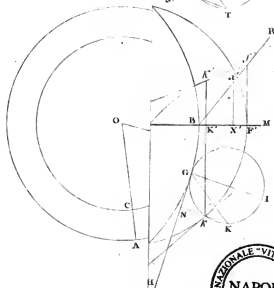


Fig. 76



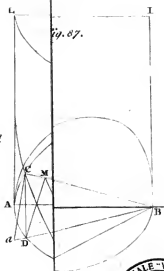
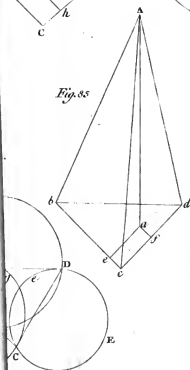
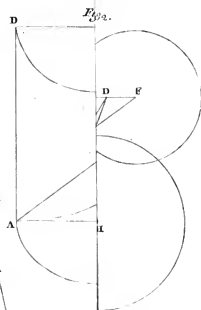
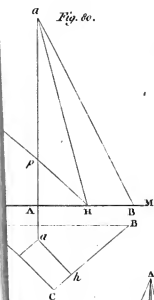


Fig. 89.

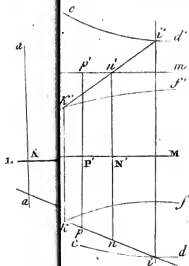
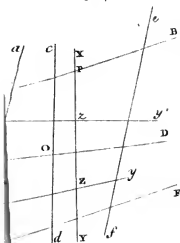


Fig. 93.

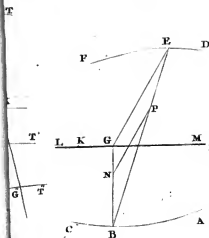
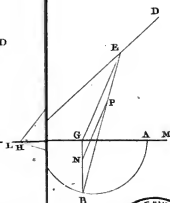
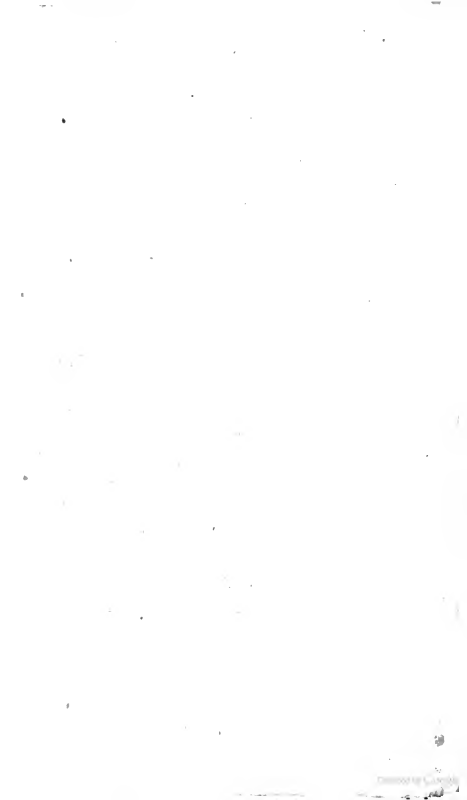


Fig. 95.





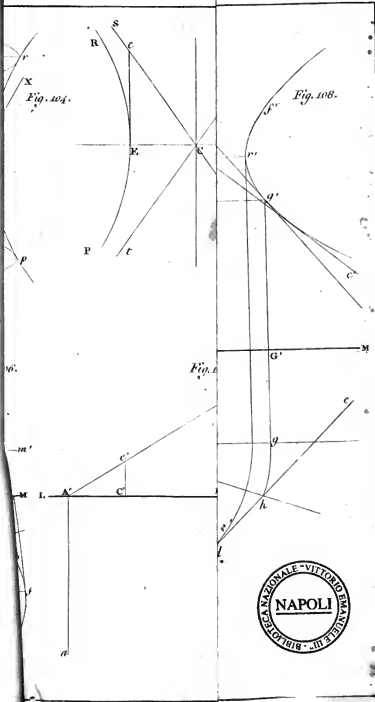
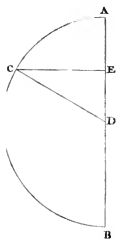




Fig. III.



m ———
 n ———

γ

Fig. IV.

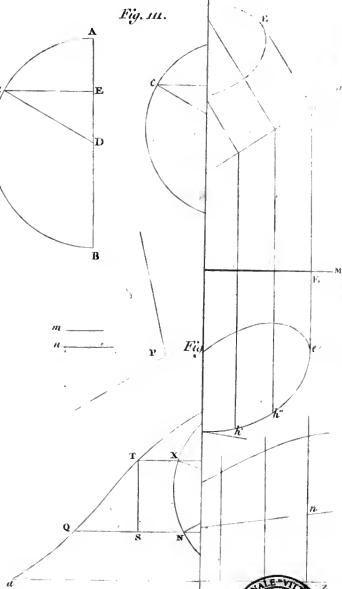




Fig. 114. N.º 2.

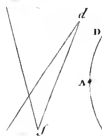


Fig. 115.

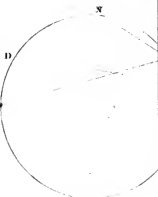


Fig. 117.



Fig. 119.

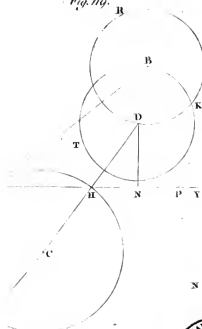
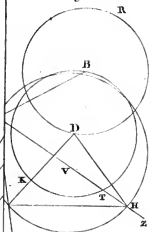


Fig. 120. N.º 2.



Fig. 124.



ql. 2.

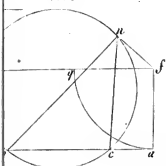


Fig. 126.

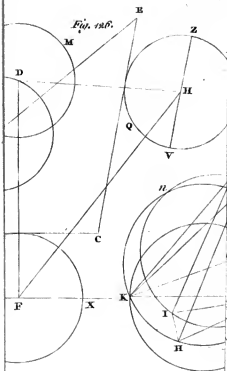
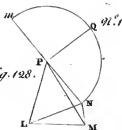


Fig. 128.



ql. 1.

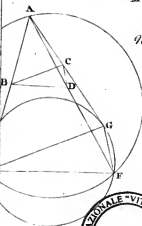




Fig. 130.

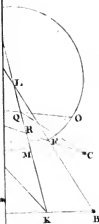
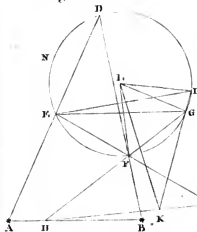


Fig. 134.

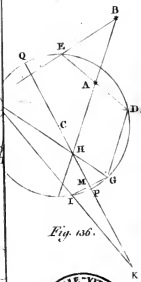
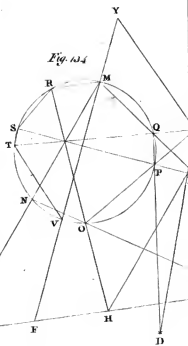


Fig. 136.





Fig. 138.

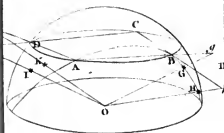


Fig. 140.

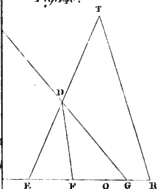


Fig. 142

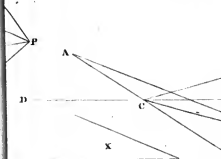
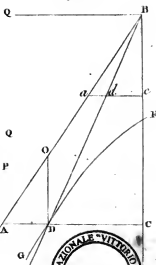


Fig. 144







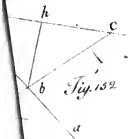


Fig. 132

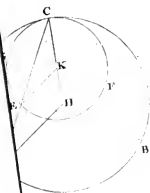


Fig. 133

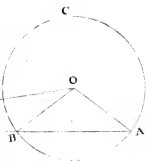


Fig. 134

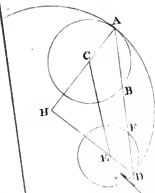


Fig. 135

